

Hochspannungstechnik I

Dr.-Ing. Rainer Badent

INSTITUT FÜR ELEKTROENERGIESYSTEME UND HOCHSPANNUNGSTECHNIK (IEH)



2.

Berechnung elektrischer Felder

Inhaltsübersicht der Vorlesung (1)

■ 2. Berechnung elektrischer Felder

2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform

2.2 Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform

2.3 Quasistatisches elektrisches Feld (50Hz-Feld der HT)

2.4 Potential und Potentialfunktion

2.5 Felder ohne Randbedingung

2.6 Einfache Felder mit Randbedingung

2.7 Laplace'sche Potentialgleichung

2.8 Poisson'sche Potentialgleichung

2.9 Numerische Feldberechnung

2.10 Technische Feldprobleme

2. Berechnung elektrischer Felder

Was ist ein Feld?

- Strenge Definition der Elektrodynamik:
„... eine endliche oder unendliche Trägermenge, deren Elemente eindeutige Werte einer bestimmten Größe zugeordnet werden können, z.B. Punktkontinuum des Euklidischen Raumes.“

2. Berechnung elektrischer Felder

Was ist ein Feld?

- Anschaulichere Erklärung der Physik:

„... ist ein Energieerfüllter Raum“

(z.B. Gebiet zwischen den Elektroden eines Plattenkondensators, Luftspalt eines Motors vergl. auch W_{pot} im Gravitationsfeld). Z.B. Ladungen erfüllen den sie umgebenden Raum mit einem elektrischen Feld, dessen Existenz sich durch Kräfte auf (geladene) Körper nachweisen lässt, die in diesen Raum gebracht werden. Im Feldraum ist potentielle Energie gespeichert, die aufgewandt wurde, um die Ladungen zu trennen und an ihren jeweiligen Ort zu bringen. Beispielsweise entspricht die Anhäufung gleichnamiger Ladungen dem Spannen einer Feder (Luftgewehr). => Ladungstrennungsarbeit = Arbeitsvermögen => Energietransport bei geschlossenem Stromkreis. Beispiel für Energietransport im Feldraum zwischen den Leitern: Freileitung und Oberleitung einer E-Lok (Poynting Vektor).

2. Berechnung elektrischer Felder

- Was ist ein Feld?

- Erklärung der Mathematik:

„ ... ist eine skalare, vektorielle oder tensorielle Ortsfunktion“

Eine skalare Ortsfunktion, die den Punkten eines Raumteils eine skalare Feldgröße zuordnet, heißt skalares Feld (**Skalarfeld**),

z.B. $\varphi(x, y, z) = \varphi(r)$.

Eine vektorielle Ortsfunktion, die den Punkten eines Raumteils eine vektorielle Feldgröße zuordnet, heißt vektorielles Feld (**Vektorfeld**), z.B. $E(r)$.

Tensorielle Feldgröße, z.B. $D = \varepsilon(r, E) \cdot E(r)$

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

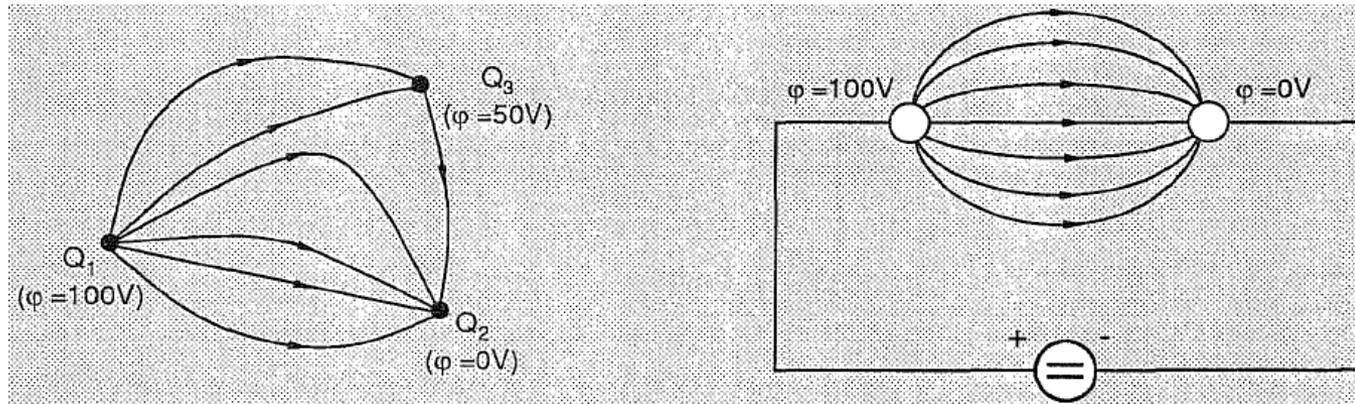
2. Berechnung elektrischer Felder

- Das allgemeine elektrische Vektorfeld besteht entsprechend des Fundamentalansatzes der Vektoranalysis aus zwei Komponenten

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_Q(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_W(\mathbf{r})$$

2. Berechnung elektrischer Felder

- **Quellenfelder:** Feldlinien haben Anfangs- und Endpunkte
 Ursache: Quellen bzw. Senken (pos. und neg. Ladungen)



Feld ohne Randbedingung
 Newton-Problem, d.h.
 reinen Raumladungsfeld

Feld mit Randbedingung
 Randwertproblem

Eine Kombination beider Fälle ist auch möglich, wenn zwischen den Kugeln (Elektroden) Raumladungen sind, z.B. Elektrofilter.

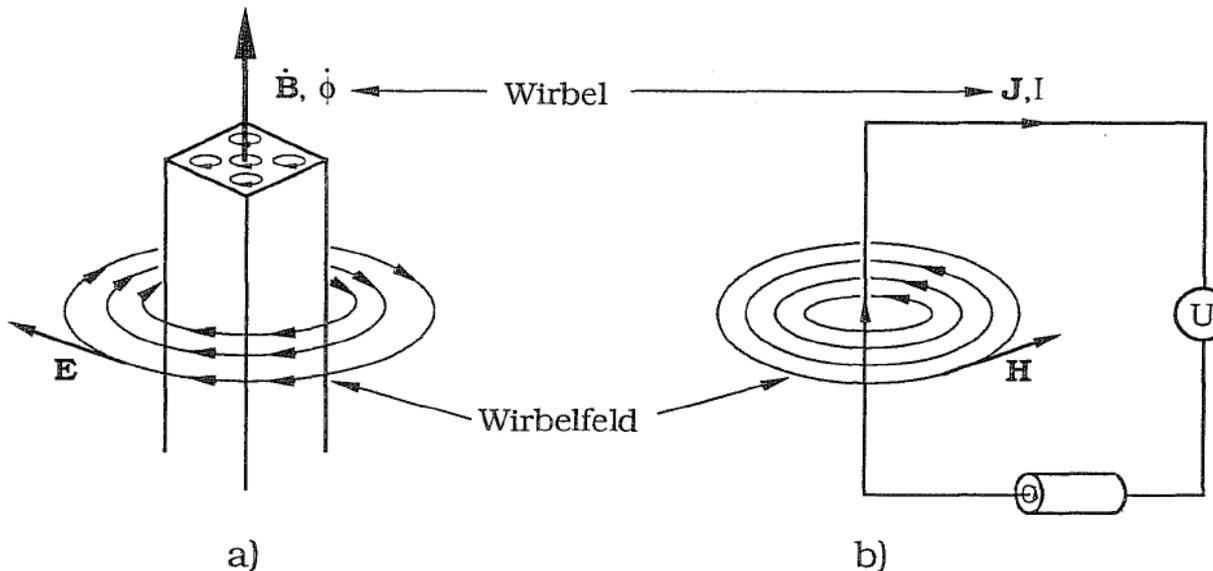
Ruhende Ladung: $U_{=} \Rightarrow \frac{d}{dt} = 0$

keine Ladungszustandsänderung

2. Berechnung elektrischer Felder

- **Wirbelfelder:** Die Feldlinien sind in sich geschlossen

Ursache: Wirbel



Elektrisches Wirbelfeld
(Transformator)

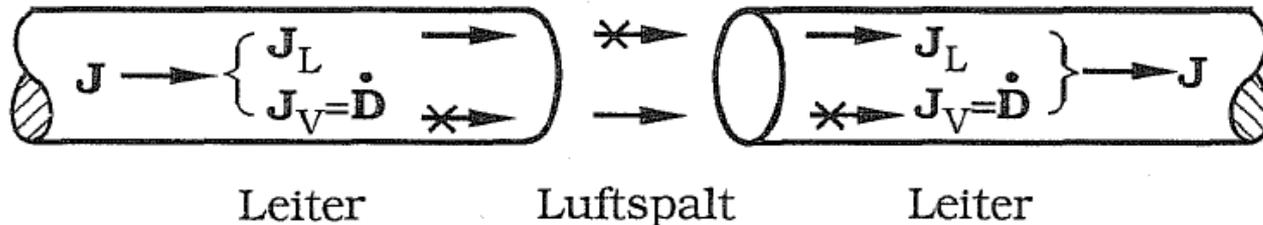
Magnetisches Wirbelfeld
(Jeder Stromkreis)

2. Berechnung elektrischer Felder

- Wahre elektrische Strömung

Ein elektrischer Strom bzw. eine Stromdichte besteht grundsätzlich aus 2 Komponenten- **Leistungsstrom** und **Verschiebungsstrom**

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_L + \dot{\mathbf{D}}$$



Leiter : $|\mathbf{J}_L| \gg |\dot{\mathbf{D}}|$

Isolierstoff : $|\dot{\mathbf{D}}| \gg |\mathbf{J}_L|$

Vakuum : $\mathbf{J}_L = 0$

2. Berechnung elektrischer Felder

- Beschreibung der Vorgänge im Feldraum ist auch möglich durch:
 - Fernwirkungstheorie: Leitergrößen Q, U, I
 - Nahwirkungstheorie: Feldgrößen **E, D, H, B**

Zusammenhang zwischen diesen Größen →

Maxwell'sche Gleichung

2. Berechnung elektrischer Felder

- **2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform**
- **2.2 Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform**
- **2.3 Quasistatisches elektrisches Feld (50Hz-Feld der HT)**
- **2.4 Potential und Potentialfunktion**
- **2.5 Felder ohne Randbedingung**
- **2.6 Einfache Felder mit Randbedingung**
- **2.7 Laplace'sche Potentialgleichung**
- **2.8 Poisson'sche Potentialgleichung**
- **2.9 Numerische Feldberechnung**
- **2.10 Technische Feldprobleme**

2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform

- $\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{r} = - \iint_A \dot{\mathbf{B}} d\mathbf{A}$

- $\oiint \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q$

- $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{r} = \iint_A (\mathbf{J}_L + \dot{\mathbf{D}}) d\mathbf{A}$

- $\oiint \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0$

Materialgleichungen:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J}_L = \kappa \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Mit **E**: elektrische Feldstärke

H: magnetische Feldstärke

D: elektrische Flussdichte

B: magnetische Flussdichte

Andere Begriffe wie Induktion, Verschiebung etc. sind irreführend und sollten vermieden werden! Wichtig ist der physikalische Inhalt der Gleichungen.

2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform

- Die mathematische Durchführung der vektoriellen Integration ist zunächst nicht und später nur selten gefragt.
- Die mathematische Problemlösung erfolgt meist mit den Maxwell'schen Gleichungen in Differentialform, anschauliche Überlegungen und physikalische Betrachtungen erfolgen mit der Integralform.
- Insgesamt gibt es 4 Darstellungen der Maxwellgleichung
 - Integralform und Differentialform im Zeitbereich
 - Integralform und Differentialform im Frequenzbereich

Die Integrale sind formal gleich und auch in vielen anderen Disziplinen zu finden.

2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform

Überdisziplinäre Kontinuumstheorie:

Gegeben sei ein Vektorfeld $X(r)$ bzw. $X(x,y,z)$ unbekannter Natur.

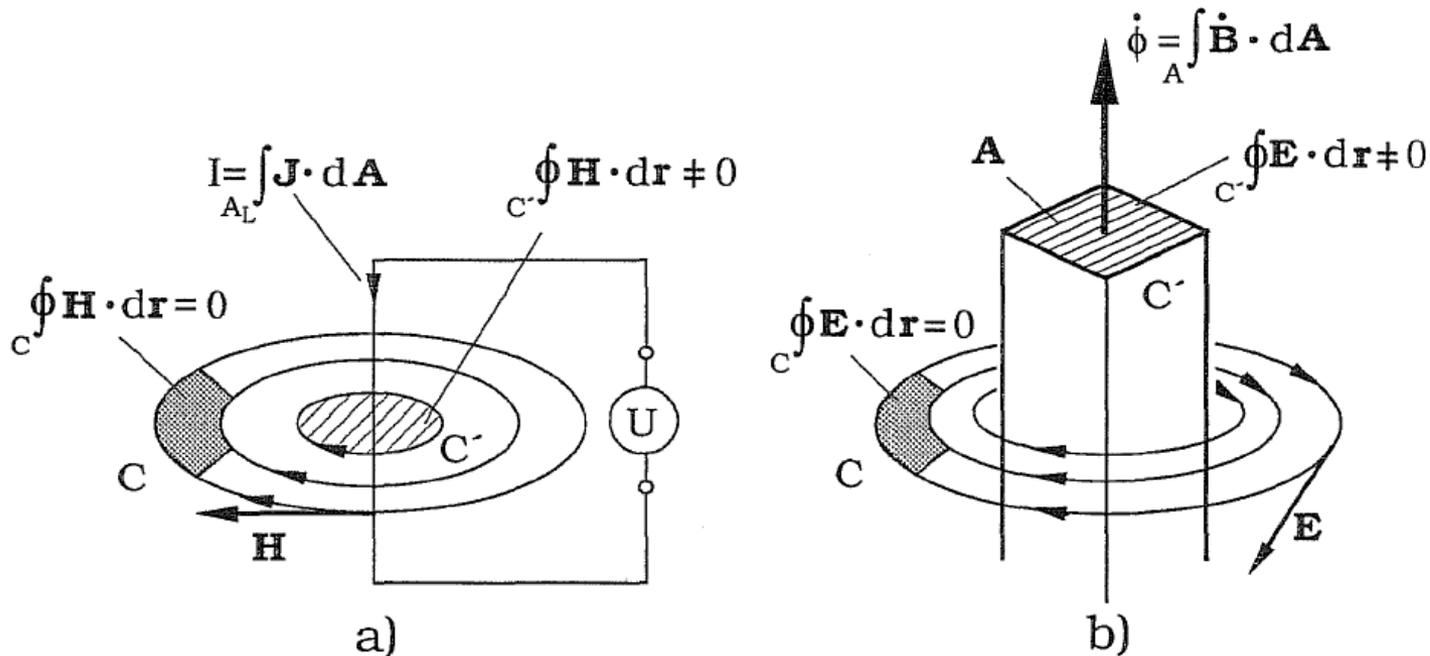
Darunter wird verstanden:

■ I.

Wirbelstärke	}	$\oint_C X dr$	{	$= 0$ wirbelfreier Bereich A
Zirkulation				(heißt nicht, dass das Feld X ein Quellenfeld sein muss, aber falls X ein reines Quellenfeld ist, gilt immer und überall $\oint_C X dr = 0$)
Umlaufspannung				$\neq 0$ wirbelbehafteter Bereich C

2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform

Z.B. Wirbelstärke innerhalb und außerhalb eines Transformator-kerns



Wirbelfreie und wirbelbehaftete Bereiche von Wirbelfeldern

a) magnetisches Feld

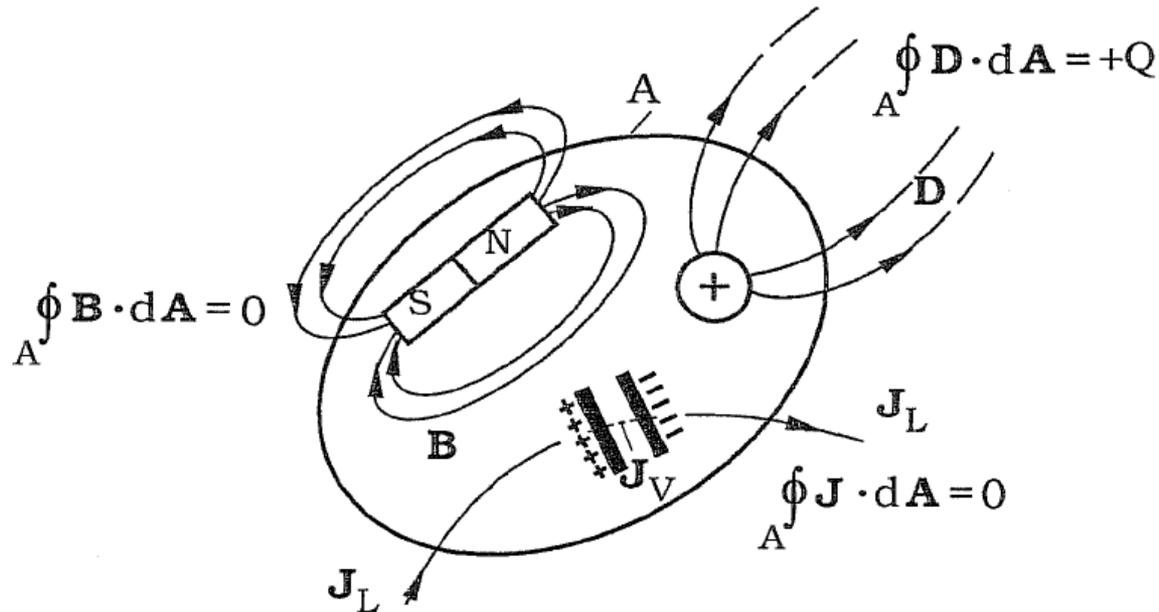
b) elektrisches Feld

2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform

■ II.

Quellenstärke	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \oint_A \mathbf{X} d\mathbf{A}$	$\left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ quellenfreier Bereich } A \\ \text{(heißt nicht, dass das Feld } X \text{ ein Wirbelfeldfeld} \\ \text{sein muss, aber falls } X \text{ ein reines Wirbelfeld ist,} \\ \text{gilt immer und überall } \oint_A \mathbf{X} d\mathbf{A} = 0 \\ \neq 0 \text{ Bereich mit Quellen} \end{array} \right.$
Hüllenfluss		
Ergiebigkeit		

2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform



Die Quellenstärke ist das Hüllenintegral (geschlossene Fläche, Luftballon) über dem Fluss eines Vektorfeldes. Sie liefern keine Aussage über den Ort der Quellen.

2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform

- Fluss eines Vektorfeldes:

$$\psi, \phi, I \text{ etc.: } \iint X dA \neq \oiint X dA$$

$$\text{z.B. } \iint B dA = \phi \quad \text{aber} \quad \oiint B dA = 0$$

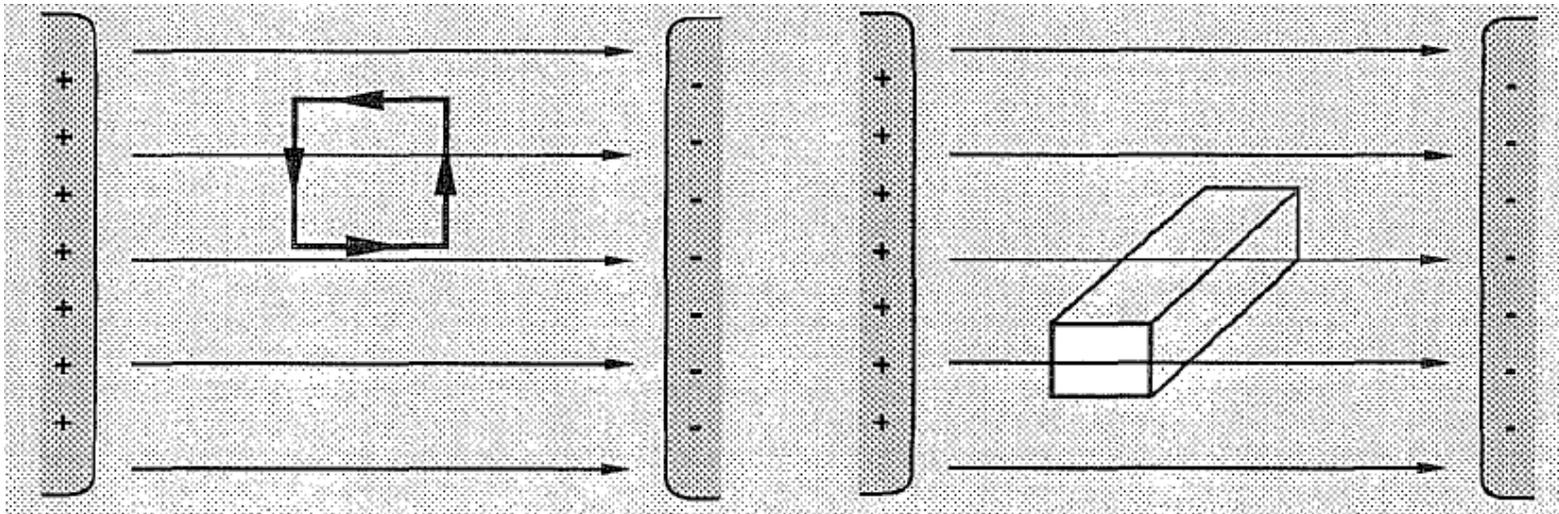
- Die Definition des Flusses stammt aus der Untersuchung unmittelbar anschaulicher Felder, z.B. dem Strömungsfeld des Wassers, wo das Flächenintegral echt die Bedeutung eines Flusses hat (Massentransport durch den Querschnitt), und wurde später auf andere Vektorfelder übertragen, bei denen nichts fließt, sondern lediglich eine mathematisch formale Übereinstimmung vorliegt.

2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform

- Wirbelfreiheit in einem Bereich C bedeutet nicht zwingend Quellenfeld.
- Reines Quellenfeld bedeutet jedoch immer und überall Wirbelfreiheit.
- Quellenfreiheit in einem Bereich A bedeutet nicht zwingend Wirbelfeld.
- Reines Wirbelfeld bedeutet jedoch immer und überall Quellenfreiheit.

2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform

- Z.B. Das Feld zwischen den Platten eines Plattenkondensators mit der Ladung $\pm Q$ ist ein quellen- und wirbelfreies Quellenfeld



$$\oint_C \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = 0$$

$$\oiint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = 0$$

2. Berechnung elektrischer Felder

- 2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform
- **2.2 Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform**
- 2.3 Quasistatisches elektrisches Feld (50Hz-Feld der HT)
- 2.4 Potential und Potentialfunktion
- 2.5 Felder ohne Randbedingung
- 2.6 Einfache Felder mit Randbedingung
- 2.7 Laplace'sche Potentialgleichung
- 2.8 Poisson'sche Potentialgleichung
- 2.9 Numerische Feldberechnung
- 2.10 Technische Feldprobleme

2.2 Maxwell'sche Gleichung in Differentialform

Wirbelstärke \rightarrow Wirbeldichte
 Quellenstärke \rightarrow Quellendichte

$$\begin{array}{ll}
 \text{rot } E = -\dot{B} & \text{rot } H = J_L + \dot{D} \\
 \text{div } D = \eta & \text{div } B = 0 \\
 D = \varepsilon E & B = \mu H \quad J_L = \kappa E
 \end{array}$$

- Quellenfeld: $\text{rot } X(r_r) = 0$
 - heißt nicht : kein Wirbelfeld
 - heißt nur : Im Punkt r_r kein Wirbelfeld

- Wirbelfeld: $\text{div } X(r_r) = 0$
 - heißt nicht : kein Quellenfeld
 - heißt nur : Im Punkt r_r keine Quellen

2.2 Maxwell'sche Gleichung in Differentialform

- Die Integralsätze von Stokes und Gauss verknüpfen Differentialform und Integralform.

- Satz von Stokes:
$$\iint_A \text{rot } X \, dA = \oint_C X \, dr$$

- Satz von Gauss:
$$\iiint_V \text{div } X \, dV = \oiint_A X \, dA$$

2.2 Maxwell'sche Gleichung in Differentialform

- Der Vektor $\text{rot } X$ beschreibt also die differentielle Zirkulation von X um ein Flächenelement dA .
- Beispiel:

$$\oint_C \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = \iint_A \text{rot } \mathbf{H} \, dA = \iint_A (\mathbf{J}_L + \dot{\mathbf{D}}) \, dA$$

$\text{rot } \mathbf{H} = \text{Rotation } \mathbf{H} = \text{Wirbeldichte von } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H}$

2.2 Maxwell'sche Gleichung in Differentialform

- Der Skalar $\text{div } X$ beschreibt den differentiellen Fluss von X aus einem Volumenelement dV .
- Beispiel:

$$\oiint_{(V)} \mathbf{D} \, dA = \iiint_V \text{div } \mathbf{D} \, dV = \iiint_V \eta \, dV$$

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint \mathbf{D} \, dA = \text{Quellendichte der Ladungen} \\ = \text{Divergenz von } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

2. Berechnung elektrischer Felder

- 2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform
- 2.2 Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform
- 2.3 Quasistatisches elektrisches Feld (50Hz-Feld der HT)
- 2.4 Potential und Potentialfunktion
- 2.5 Felder ohne Randbedingung
- 2.6 Einfache Felder mit Randbedingung
- 2.7 Laplace'sche Potentialgleichung
- 2.8 Poisson'sche Potentialgleichung
- 2.9 Numerische Feldberechnung
- 2.10 Technische Feldprobleme

2.3 Quasistatisches elektrisches Feld

- Fundamentalsatz der Vektoranalysis

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_Q + \mathbf{E}_W$$

- Quellenkomponente \mathbf{E}_Q

Es gilt:

$$\oint_C \mathbf{E}_Q \cdot d\mathbf{r} = 0; \quad \text{rot } \mathbf{E}_Q = 0 \quad \text{Wirbelfreiheit}$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q; \quad \text{div } \mathbf{D} = \eta \quad \text{Maxwell}$$

- Gesucht: Gleichung $\mathbf{E}_Q = \dots\dots$

2.3 Quasistatisches elektrisches Feld

- Es gilt: $\text{rot grad } \varphi = 0$ (rein mathematischer Formalismus)
 $\text{rot } E_Q = 0$ Maxwell

$$\Rightarrow -\text{rot grad } \varphi = \text{rot } E_Q \quad \left| \left\{ \text{rot}^{-1} \right\} \right.$$

Das Minuszeichen ist historisch bedingt und willkürlich; $-0 = +0$

$$\Rightarrow E_Q = -\text{grad } \varphi$$

Quellenfeld-Feldstärke
 wobei $\varphi = \varphi(x, y, z)$
 irgendeine skalare
 Ortsfunktion, genannt
 Potentialfunktion darstellt.

2.3 Quasistatisches elektrisches Feld

■ Wirbelkomponente E_W

Es gilt:

$$\oint_C E_W \, dr = -\iint \dot{B} \, dA; \quad \text{rot } E_W = -\dot{B}$$

$$\iint B \, dA = 0; \quad \text{div } B = 0$$

■ Gesucht: Gleichung $E_W = \dots\dots$

Es gilt:

$$\text{div rot } A = 0 \quad (\text{rein mathematischer Formalismus})$$

$$\text{div } B = 0 \quad \text{Wirbelfreiheit}$$

2.3 Quasistatisches elektrisches Feld

$$\Rightarrow \quad \text{div } \mathbf{B} = \text{div } \text{rot } \mathbf{A} \quad \left\{ \text{div}^{-1} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_w = -\dot{\mathbf{B}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} = -\text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}_w = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{Wirbelfeld-Feldstärke}$$

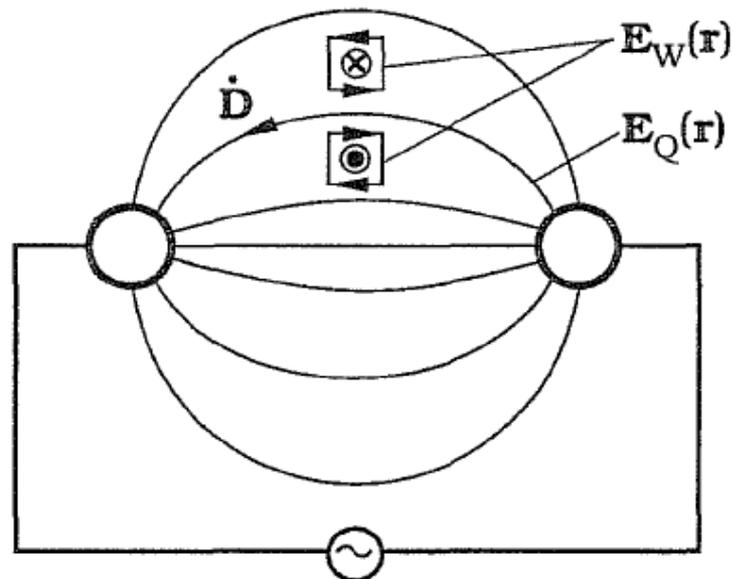
In Praxi: **Kombifeld**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_Q(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_w(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\partial t}$$

2.3 Quasistatisches elektrisches Feld

- Beispiel: 50 Hz-Felder der HT

$$E_{50\text{Hz}}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) - \cancel{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}$$



2.3 Quasistatisches elektrisches Feld

- Zwischen den Kugeln besteht ein Quellenfeld entsprechend den Augenblickswerten der Potentiale der Kugeln, bzw. der an ihnen liegenden Spannung.
- Außerdem fließt ein Wechselstrom (Verschiebungsstrom), dessen zeitlich veränderliches Magnetfeld mit einem Wirbelfeld der Wirbeldichte $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ verknüpft ist, das sich dem elektrischen Quellenfeld überlagert.
- Bei 50 Hz ist die zeitliche Änderung des mit dem Verschiebungsstrom-verknüpften Magnetfeldes so gering, dass der örtliche Beitrag der Wirbelfeldstärke mit der Wirbeldichte $\text{rot } \mathbf{E}$ vernachlässigt werden kann.

2.3 Quasistatisches elektrisches Feld

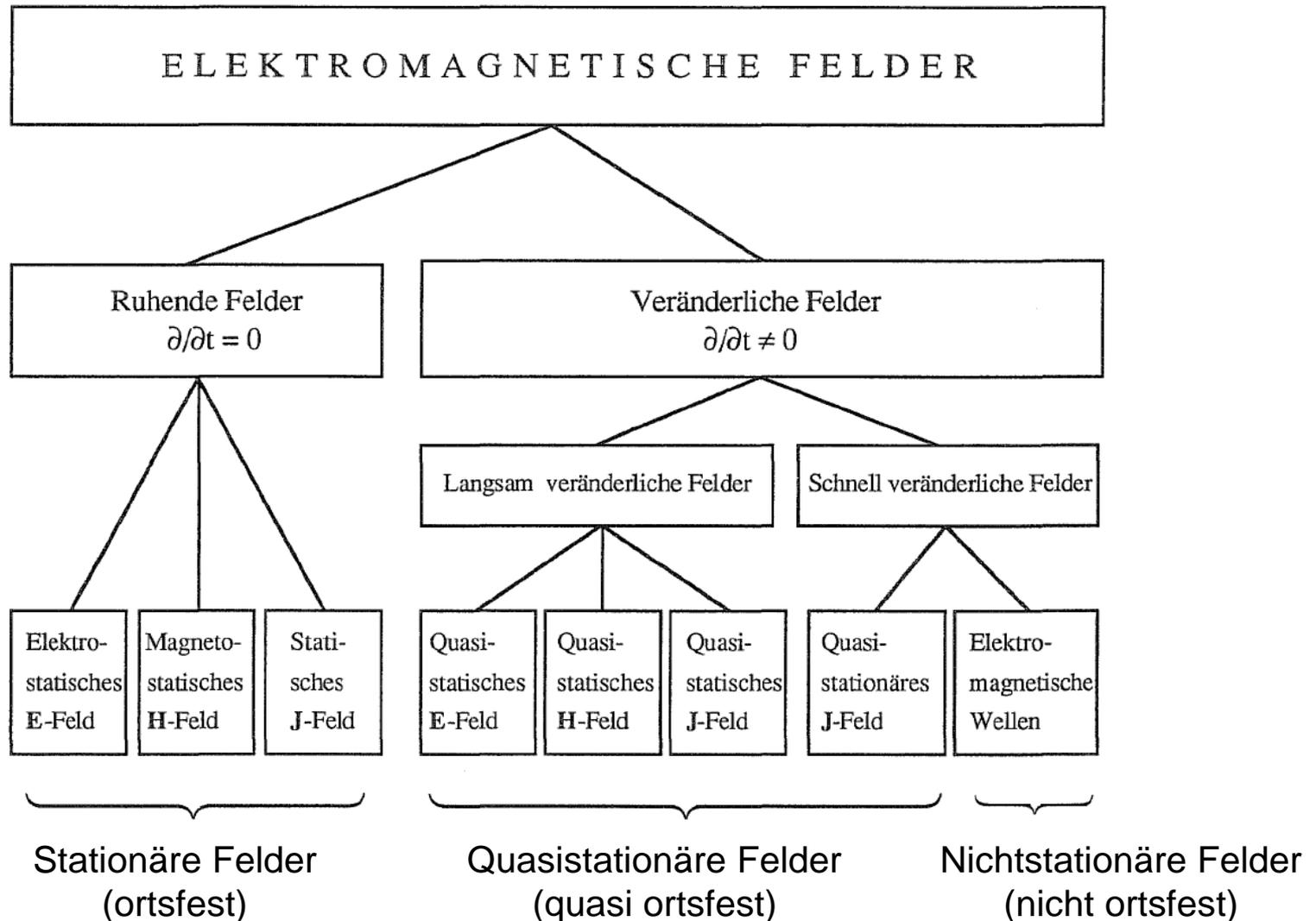
- Elektrostatische Felder: $\oint_C \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = 0$ bzw. $\text{rot } \mathbf{E} = 0$

- 50 Hz-Felder: $\oint_C \mathbf{E} \, d\mathbf{r} \approx 0$ bzw. $\text{rot } \mathbf{E} \approx 0$ für

$$\mathbf{E}_w = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \ll -\text{grad } \varphi$$

- Die induzierende Wirkung, des durch den Verschiebungsstrom hervorgerufenen Magnetfeldes, wird vernachlässigt. (Nicht der Verschiebungsstrom und das mit ihm verknüpfte Magnetfeld!)
- Es gibt ruhende und zeitlich veränderliche Felder. Letztere werden in langsam und schnell veränderliche Felder unterteilt.

2.3 Quasistatisches elektrisches Feld



2. Berechnung elektrischer Felder

- 2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform
- 2.2 Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform
- 2.3 Quasistatisches elektrisches Feld (50Hz-Feld der HT)
- 2.4 Potential und Potentialfunktion
 - 2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes
- 2.5 Felder ohne Randbedingung
- 2.6 Einfache Felder mit Randbedingung
- 2.7 Laplace'sche Potentialgleichung
- 2.8 Poisson'sche Potentialgleichung
- 2.9 Numerische Feldberechnung
- 2.10 Technische Feldprobleme

2.4 Potential und Potentialfunktion

- In der Physik sind zahlreiche Größen über einen **Differentialquotienten** bzw. ein **unbestimmtes Integral** miteinander verknüpft, beispielsweise in der Mechanik: Weg und Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad \text{bzw.} \quad s(t) = \int v(t) dt + C$$

oder in der Netzwerktheorie: Spannung und Strom einer Spule

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{bzw.} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt + C$$

- Auf verwandte Weise hängen in der Feldtheorie die elektrische **Feldstärke** $E(r)$ eines Quellenfeldes und die **Potentialfunktion** $\varphi(r)$ der zugehörigen Ladungsverteilung miteinander zusammen

$$E(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr} \quad \text{bzw.} \quad \varphi(r) = -\int E(r) \cdot dr + C$$

2.4 Potential und Potentialfunktion

- Die Integrationskonstante C entspricht im ersten Beispiel einem bereits zurückgelegten von t unabhängigen Weg s_0 , im zweiten einem bereits vorhandenen von t unabhängigen Gleichstrom I_0 , im letzten einem von r unabhängigen räumlich konstanten Potential φ_0 .
- Das Minuszeichen ist eine aus den Anfängen der Elektrotechnik herrührende Konvention, da damals die elektrische Feldstärke vom höheren zum niedrigeren Potential zeigend, positiv festgelegt wurde.
- Die anderen Disziplinen der Kontinuumstheorie kennen das negative Vorzeichen nicht. Dort zeigt der Gradient in Richtung höheren Potentials.

2.4 Potential und Potentialfunktion

- Bei Vorgabe einer oberen und einer unteren Grenze gehen die unbestimmten Integrale in bestimmte Integrale über, wobei die Integrationskonstante entfällt.
- Die linken Seiten der Gleichung repräsentieren dann nicht mehr Funktionen, sondern eine bestimmte Wegstrecke Δs , eine Stromänderung Δi oder eine Potentialdifferenz $\Delta \varphi$.
- Während in den ersten beiden Beispielen Weg und Strom eigenständige physikalische Größen sind, stellen das **Potential** und die **Potentialfunktion** universelle Oberbegriffe dar, die in vielen Disziplinen zu finden sind und die je nach Problem eine unterschiedliche physikalische Bedeutung haben können. Im vorliegenden Zusammenhang sprechen wir vom **elektrischen Potential**.

2.4 Potential und Potentialfunktion

- Oft dient das Potential nur als mathematische Hilfsfunktion, über die sich eine Feldstärke $E(r)$ einfacher ermitteln lässt als durch direktes Lösen einer Gleichung mit $E(r)$ als abhängiger Variablen. Das Potential ist eine überdisziplinäre Hilfsgröße zur Berechnung von Vektorfeldern (eingeführt von Green).
- Während E immer nur implizit gegeben ist, z.B. $\int E \, dr$ oder $\text{rot } E$ und erst nach Lösen einer Differentialgleichung und Einführung von Randbedingungen gefunden werden kann, führt beim Potential schlichte Differentiation zum Erfolg.

2.4 Potential und Potentialfunktion

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)$$

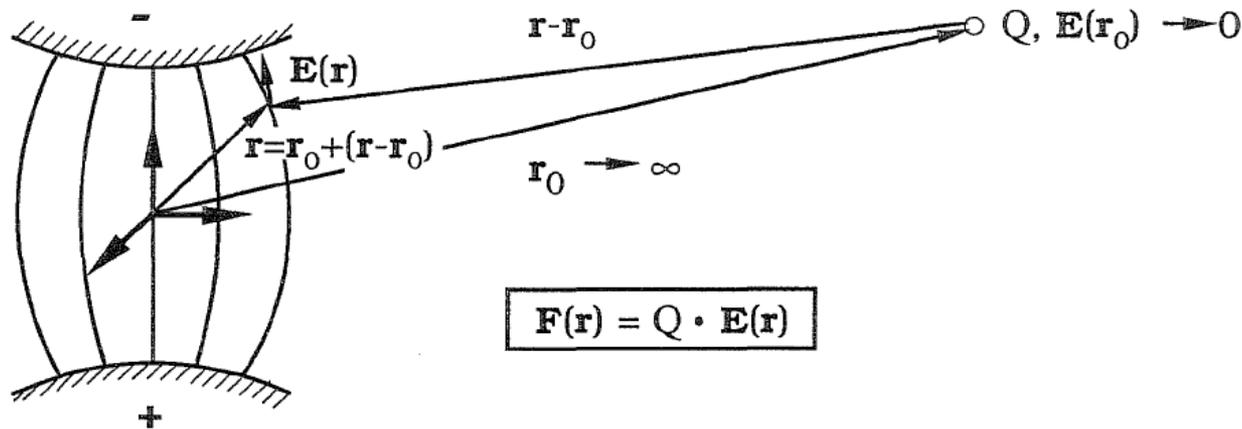
- Dies ist recht einfach, wenn die Potentialfunktion $\varphi(x,y,z)$ erst einmal bekannt ist.

- „Differenzieren ist ein Handwerk, aber Integrieren eine Kunst. Ein Handwerk kann man erlernen, zum Künstler muss man geboren sein.“
- Zitat Dr. E. Gauss, HM Vorlesung

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes

- In einem elektrostatischen Feld ist potentielle Energie gespeichert, die aufgewandt wurde, um seine Quellen (positive und negative Ladungen) durch Ladungstrennung aus neutralen Teilchen zu erzeugen und an ihren jeweiligen Ort zu bringen.
- Zur weiteren Veranschaulichung des bereits formal eingeführten Potentialbegriffs berechnen wir die Energie, die aufgewandt werden muss, um eine im Unendlichen existierende Ladung in ein bereits vorhandenes elektrisches Feld zu bringen.
- Je nach Vorzeichen der Ladung und ihrem späteren Ort nimmt das bereits vorhandene Feld (Energiespeicher) dabei Energie auf oder gibt Energie ab.

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes



Zur Berechnung des Energieaufwands beim Transport einer Ladung aus einem feldfreien Raum ($r_0 = \infty$) in ein elektrisches Feld.

Die Ladung Q ist so klein, dass sie das Feld $E(\mathbf{r})$ nicht merklich stört. Das Feld $E(\mathbf{r})$ übt auf die Ladung Q eine Kraft $F(\mathbf{r}) = QE(\mathbf{r})$ aus. Damit berechnet sich die von Feld geleistete Arbeit, bzw. die vom Feld aufgewandte Energie zu

$$W = \int_{r_0 = \infty}^r \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\infty}^r Q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = Q \int_{\infty}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes

- Diese Energie hängt einerseits von Größe und Vorzeichen der Ladung Q , andererseits von der feldspezifischen Komponente $\int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ ab, die wir bereits Potential genannt haben.
- Letztere wollen wir im folgenden isolieren, indem wir die Energie auf die transportierte Ladung beziehen und die elektrische Feldstärke als Gradient der skalaren Potentialfunktion $\varphi(\mathbf{r})$ darstellen.
- Gleichzeitig ändern wir das Vorzeichen, betrachten also nicht mehr die Arbeit des Feldes, sondern die von außen zugeführte Energie.

$$-\frac{W}{Q} = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \text{grad } \varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} d\varphi = \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\infty)$$

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes

- In dieser Gleichung steht $\varphi(r)$ für das spezifische Arbeitsvermögen eines elektrischen Feldes im Feldpunkt, $\varphi(\infty)$ für das spezifische Arbeitsvermögen eines Feldpunktes im Unendlichen und $-W/Q$ für die Differenz beider.
- Da die Feldstärke im Unendlichen Null ist und das Verschieben der Ladungen im feldfreien Raum keiner Arbeit bedarf, setzen wir $\varphi(\infty) = 0$. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir das ortsabhängige spezifische Arbeitsvermögen $\varphi(r)$ eines Feldes $E(r)$ über das unbestimmte Integral

$$\varphi(r) = -\int E(r) \cdot dr$$

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes

- Das spezifische Arbeitsvermögen eines Feldes in einem bestimmten Punkt $P(r_1)$ bzw. $P(X_1, Y_1, Z_1)$ wird sein Potential $\varphi(r_1)$ bzw. $\varphi(x_1, y_1, z_1)$ genannt.
- Die skalare Funktion $\varphi(x, y, z)$ wird Potentialfunktion genannt. Sie ist ein Skalarfeld, das gemäß obiger Rechenvorschrift in ein Vektorfeld $E(x, y, z)$ eingezeichnet werden kann.
- Das Potential besitzt die Einheit Volt.
- Das unter der Vereinbarung $\varphi(\infty) = 0$ hergeleitete Potential wird oft auch "absolutes Potential" genannt.

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes

- Die Differenz im Potential zweier Feldpunkte r_1 und r_2 wird die elektrische Spannung U_{12} zwischen diesen beiden Punkten genannt. Berechnet wird sie wahlweise durch die Auswertung zweier uneigentlicher Integrale, mit jeweils einer Integrationsgrenze im Unendlichen oder eines bestimmten Integrals zwischen den endlichen

Grenzen r_1 und r_2 :

$$\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = -\int_{\infty}^{r_1} \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\infty}^{r_2} \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{r} = U_{12}.$$

- Umgekehrt ist durch die Spannung U_{12} die Potentialdifferenz zwischen zwei Feldpunkten r_1 und r_2 gegeben:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \text{grad } \varphi(r) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_1}^{r_2} d\varphi = -\varphi(r) \Big|_{r_1}^{r_2} \\ &= \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \varphi_1 - \varphi_2; \end{aligned}$$

z.B. $11\text{V} - 3\text{V} = 8\text{V}$

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes

- Oft wird der erdseitigen Klemme einer Schaltung das Potential "0,, (**Erdpotential**) zugeordnet, was sich entweder per Definition $-\varphi_{\text{Erde}} = \varphi_{\infty} = 0$ oder anschaulich, durch eine gedachte leitende Verbindung zwischen Erde und Unendlich, vorstellen lässt.
- Die geerdete Klemme einer Spannungsquelle liegt dann auf Erdpotential, die „spannungsführende“ Klemme (engl.: **live terminal**) auf positivem oder negativem Potential.
- Die Umkehrung der Potentialdefinition lautet

$$E(r) = -\text{grad } \varphi(r)$$

-> bereits am Anfang des Kapitels erwähnt.

Sie lässt formal erkennen, dass das Potential eines Raumpunktes keine eindeutige Größe darstellt.

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes

- So darf einer Potentialfunktion $\varphi(r)$ ein beliebiges ortsunabhängiges Potential $\varphi_0 = \text{const.}$ überlagert werden, dessen Existenz nach der Gradientenbildung nicht mehr in Erscheinung tritt, d.h. keinen Beitrag zum elektrischen Feld $E(r)$ liefert.
- Es gilt also:

$$E(r) = -\text{grad } \varphi(r) = -\text{grad}[\varphi(r) + \varphi_0] := -\text{grad } \varphi^*(r)$$

- Die Potentialfunktion $\varphi^*(r)$ liefert das selbe elektrische Feld wie die Potentialfunktion $\varphi(r)$.

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes

- Erst durch eine sinnfällige Vereinbarung über φ_0 , beispielsweise die bei der Herleitung des absoluten Potentials getroffene Wahl $\varphi_0 = \varphi(\infty) = 0$, wird das Potential eindeutig.
- Die Festlegung $\varphi(\infty) = 0$ ist in vielen Fällen zweckmäßig, aber nicht zwingend erforderlich. Je nach Aufgabenstellung kann eine andere Wahl sinnvoll sein (z.B. bei Randwertproblemen). Hier offenbart sich einmal mehr, dass der Potentialbegriff eher mathematischer denn physikalischer Natur ist.
- Wird das Potential bzw. die Potentialfunktion einer Kondensatoranordnung durch die an den Elektroden liegende Spannung dividiert, so wird erkannt, dass die bezogene Potentialfunktion allein eine Eigenschaft des Raumes ist, bzw. seiner Ränder (Randwertprobleme).

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes

- Die bezogene Potentialfunktion eines bestimmten elektrischen Feldes ist beispielsweise identisch mit der bezogenen Potentialfunktion eines Gravitationsfeldes mit den gleichen Rändern.
- So ist der Potentialbegriff keine Spezialität des elektrischen Feldes, sondern eine in vielen anderen Disziplinen zu findende mathematische Hilfsgröße zur Beschreibung wirbelfreier Felder, aus deren Kenntnis heraus sich ein gesuchtes Vektorfeld auf einfache Weise durch Differentiation (Gradientenbildung) gewinnen lässt.
- Ganz allgemein kann jedem wirbelfreien Bereich eines beliebigen Vektorfeldes $X(r)$ eine skalare Potentialfunktion $\varphi(r)$ als formale Hilfsgröße über die Gleichung

$$X = \text{grad } \varphi$$

zugeordnet werden.

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes

- Wird auf beiden Seiten der Gleichung die Wirbeldichte gebildet, so ergibt sich:

$$\text{rot } X = \text{rot grad } \varphi = 0$$

weil die Differentialoperationen rot und grad, sequentiell auf ein beliebiges Skalarfeld angewandt, immer Null ergeben.

Anschaulich ist leicht einzusehen, dass $\text{rot grad } \varphi = 0$ grundsätzlich gilt, da der Gradient eines Skalarfeldes immer ein Quellenfeld X_Q ergibt, dessen Wirbeldichte $\text{rot } X_Q$ per Definition Null ist.

2.4.1 Potential und Potentialfunktion des elektrostatischen Feldes

- Dies bedeutet, dass all jene Funktionen $X(\mathbf{r})$ durch Gradientenbildung aus einer skalaren Potentialfunktion $\varphi(\mathbf{r})$ hergeleitet werden können, die im betrachteten Bereich die Bedingung $\text{rot } X = 0$ erfüllen, d.h. wirbelfrei sind.
- Obige Betrachtungen gelten nur für elektrische Quellenfelder $E_Q(\mathbf{r})$, d.h. für statische bzw. quasistatische Felder.

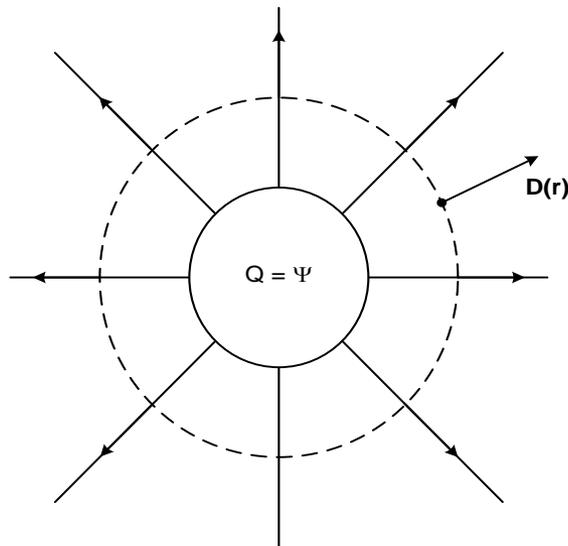
2. Berechnung elektrischer Felder

- 2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform
- 2.2 Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform
- 2.3 Quasistatisches elektrisches Feld (50Hz-Feld der HT)
- 2.4 Potential und Potentialfunktion
- 2.5 Felder ohne Randbedingung
 - 2.5.1 Kugelladung und Punktladung
 - 2.5.2 Linienladung, Flächenladung, Raumladung
 - 2.5.3 Überlagerung von Flächenelementen
- 2.6 Einfache Felder mit Randbedingung
- 2.7 Laplace'sche Potentialgleichung
- 2.8 Poisson'sche Potentialgleichung
- 2.9 Numerische Feldberechnung
- 2.10 Technische Feldprobleme

2.5.1 Kugelladung und Punktladung

2.5.1.1 Ladung im Ursprung

Es gilt:
$$\oiint_A \mathbf{D} \, dA = Q$$



Kugelkoordinatensystem mit der Ladung im Ursprung

$$\Rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

Mit
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r})}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

2.5.1.1 Ladung im Ursprung

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^r E(r) dr = -\int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$$

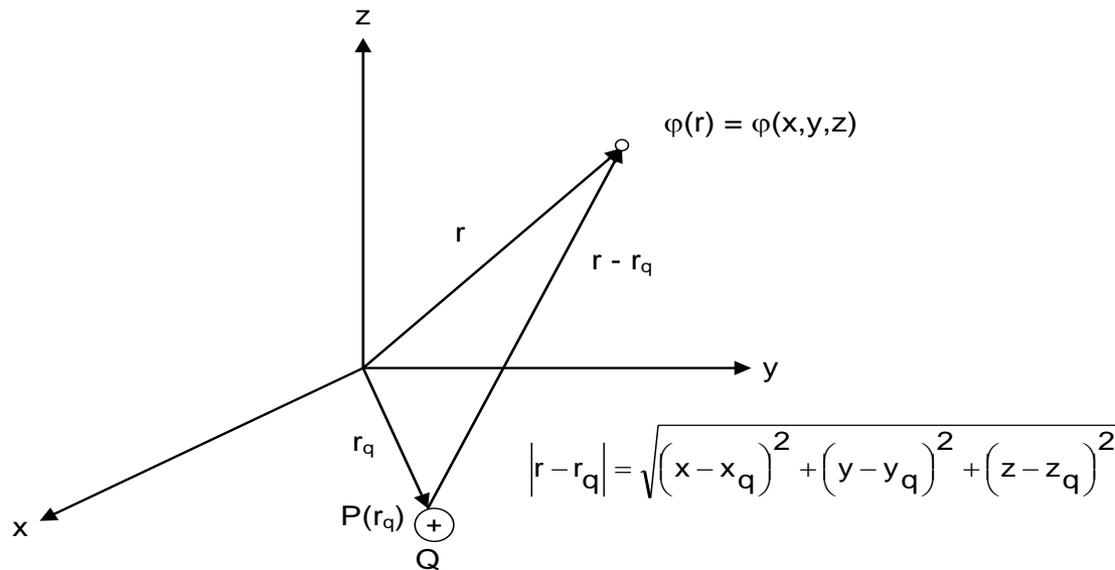
Kontrolle: $E = -\text{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} e_r \quad \text{q.e.d.}$

Der Faktor $\frac{1}{4\pi\epsilon r}$ wird als Potentialdifferenz p_r bezeichnet

Obige Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$\varphi(r) = p_r \cdot Q$$

2.5.1.2 Ladung außerhalb des Ursprungs



■ Es gilt:

$$\oiint D \, dA = Q$$

2.5.1.2 Ladung außerhalb des Ursprungs

$$\Rightarrow D(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|}$$

$$\Rightarrow E(\mathbf{r}) = \frac{D(\mathbf{r})}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} = p_{rrq} Q$$

mit $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q| = \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2}$

2.5.1.2 Ladung außerhalb des Ursprungs

- Die Geometriekomponente

$$\frac{1}{4\pi |r - r_q|}$$

bezeichnet mal als Greensche Funktion des dreidimensionalen Raums

$$G_3(r, r_q) = \frac{1}{4\pi |r - r_q|}$$

2.5.2 Linienladung, Flächenladung, Raumladung

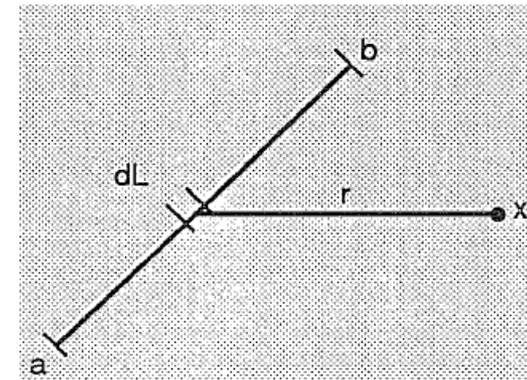
- Linienladungsdichte

$$\rho_L = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{dQ}{dL}$$

- Linienladung \triangleq endlose Kette von „Punktladungen“ $dQ = \rho_L dL$

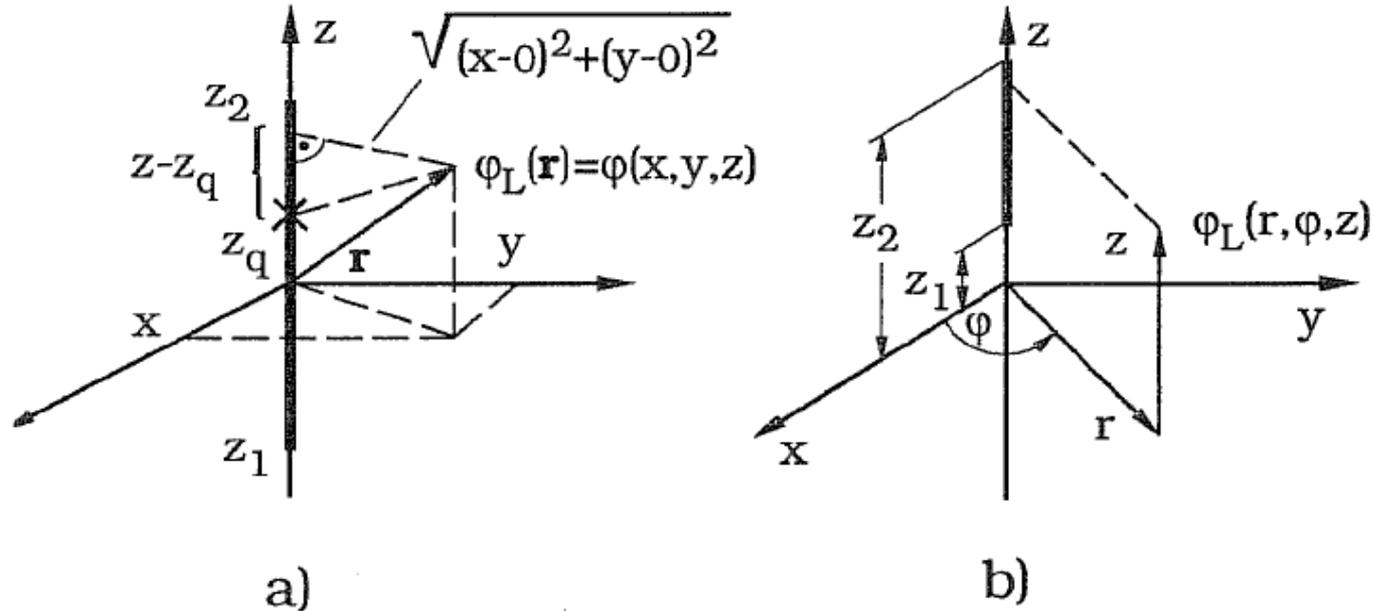
- Potentialbeitrag von dL :

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon r} = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon r}$$



$$\varphi_L = \int_a^b d\varphi = \int_a^b \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_a^b \frac{\rho_L dL}{r}$$

2.5.2 Linienladung, Flächenladung, Raumladung



Linienladung $\rho_L(z) = \text{const.}$

a) für kartesische Koordinaten, b) für Zylinderkoordinaten

2.5.2 Linienladung, Flächenladung, Raumladung

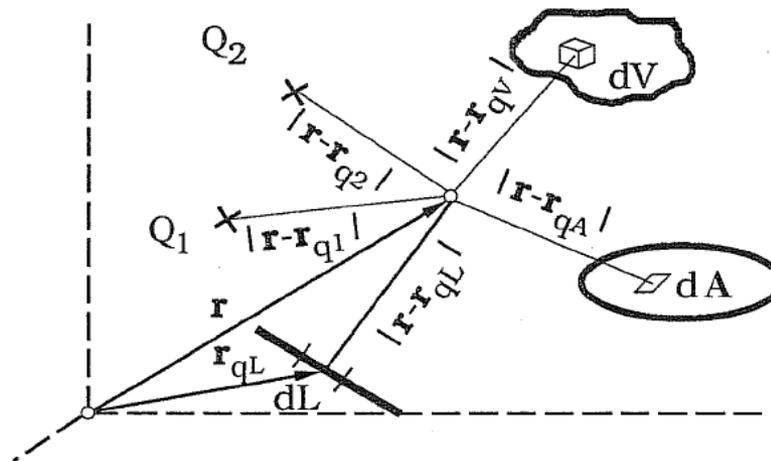
$$\varphi_L(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_L(z_q)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z_q)^2}} dz_q$$

$$\varphi_L(x, y, z) = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon} \ln \frac{z_2 - z + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_2)^2}}{z_1 - z + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}}$$

2.5.3 Überlagerung von Elementarladungen

■ Flächenladungsdichte: $\rho_A \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_A \frac{\rho_A}{r} dA$

■ Raumladungsdichte: $\eta_V \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\eta_V}{r} dV$



Superposition verschiedener Teilpotentiale zur globalen Potentialfunktion $\varphi(\mathbf{r})$;
 Integrationsvariable ist der Quellenvektor \mathbf{r}_q .

2.5.3 Überlagerung von Elementarladungen

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\sum \frac{Q_v}{|r - r_q|} + \int_L \frac{\rho_L(r_q)}{|r - r_q|} dL_q + \iint_A \frac{\rho_A(r_q)}{|r - r_q|} dA_q + \iiint_V \frac{\eta(r_q)}{|r - r_q|} dV_q \right]$$

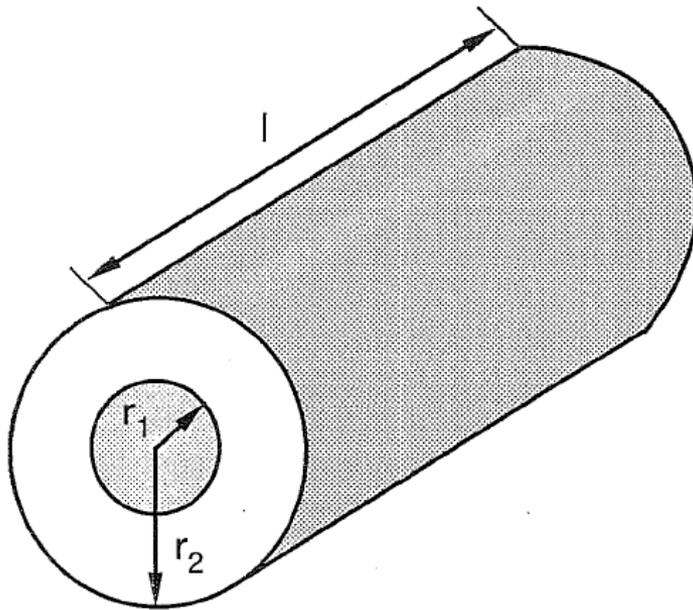
- Die Punkt- Ring- und Raumladungen etc. erzeugen Raumladungsfelder am Rand.
- Praxis: Elektrodenränder sind vorgegeben und die Ladungsverteilung ist unbekannt.
- Abhilfe:
 - a) Direkte Integration der Laplace Gleichung und Suche einer speziellen Lösung für die vorgegebene Randbedingung (normalerweise unmöglich).
 - b) Numerisches Lösungsverfahren mit Rechner.

2. Berechnung elektrischer Felder

- 2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform
- 2.2 Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform
- 2.3 Quasistatisches elektrisches Feld (50Hz-Feld der HT)
- 2.4 Potential und Potentialfunktion
- 2.5 Felder ohne Randbedingung
- **2.6 Einfache Felder mit Randbedingung**
 - 2.6.1 Zylinderkondensator
 - 2.6.2 Kugelkondensator
 - 2.6.3 Paralleler Zylinder
 - 2.6.4 Leiter-Ebene
- 2.7 Laplace'sche Potentialgleichung
- 2.8 Poisson'sche Potentialgleichung
- 2.9 Numerische Feldberechnung
- 2.10 Technische Feldprobleme

2.6 Einfache Felder mit Berandung

2.6.1 Zylinderkondensator



a)
$$D(r) = \frac{\psi}{A(r)} = \frac{Q}{2\pi r l}$$

b)
$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon r l}$$

2.6.1 Zylinderkondensator

c)

$$U_{12} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E(r) \, dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{U_{12} \cdot 2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

mit $Q = C \cdot U$

d)

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$E(r) = \frac{U_{12}}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \Rightarrow E_{\max} = \frac{U_{12}}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

2.6.1 Zylinderkondensator

Typisches Konstruktionsproblem

Gegeben: r_2 ($\hat{=}$ maximale Abmessung der Konstruktion)

Gesucht: r_1 , so dass $E_{\max} = E(r_1)$ minimal ist

$$E_{\max} = \frac{U_{12}}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \text{Min}$$

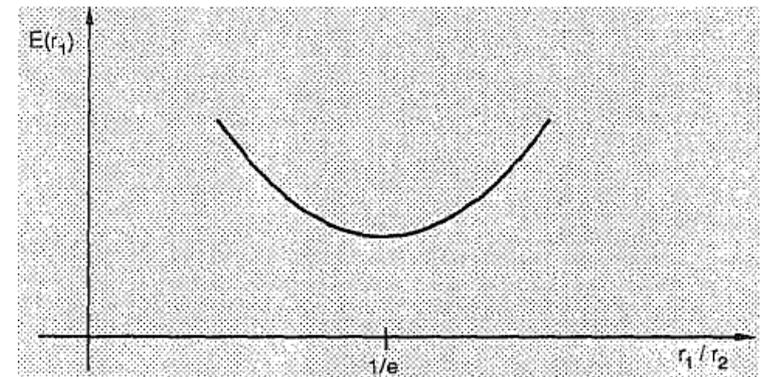
Da U_{12} fest vorgegeben ist, muss der Nenner möglichst groß werden, d.h. ein Maximum annehmen.

2.6.1 Zylinderkondensator

$$\Rightarrow \frac{d}{dr_1} \left(r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{d}{dr_1} \left(r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) = \frac{d}{dr_1} (r_1 \ln r_2 - r_1 \ln r_1) = \ln r_2 - \ln r_1 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \ln \frac{r_2}{r_1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} = e$$

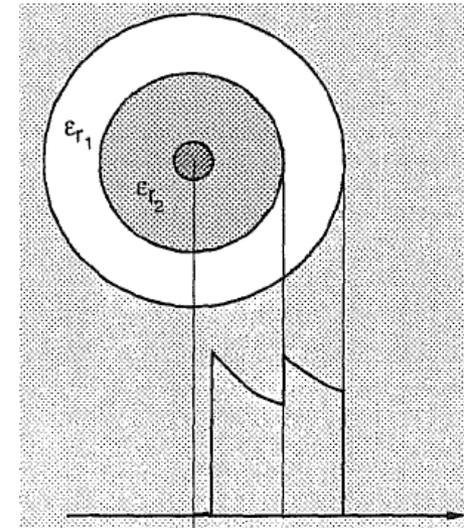


$$\frac{d^2}{dr_1^2} \left(r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) = -\frac{1}{r_1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} = e \text{ ist ein Maximum}$$

2.6.1 Zylinderkondensator

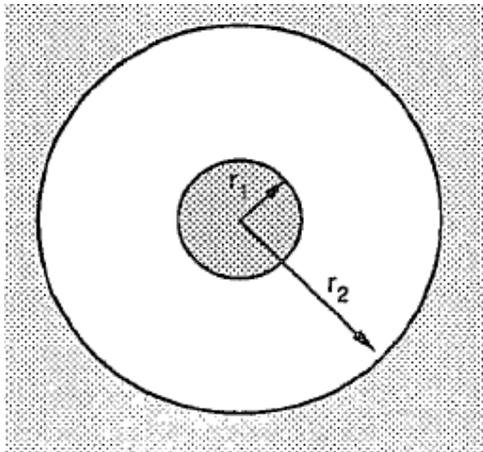
- Zylinderkondensator mit mehreren Schichten

$$C = \frac{2 \pi \epsilon l}{\frac{1}{\epsilon r_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon r_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \dots}$$



- Durch geschickte Abstufung mit geeigneten Dielektrika wird eine Homogenisierung der Feldstärke im Zylinderkondensator erreicht und damit bei gleicher Spannung eine niedrigere Maximalfeldstärke.
- Anwendung: Öl-Papier-Kabel, am Innenleiter wird Papier höherer Dichte und damit mit größerem ϵ_r verwendet.

2.6.2 Kugelkondensator



$$\text{a) } D(r) = \frac{\psi}{A(r)} = \frac{Q}{4\pi r_2^2}$$

$$\text{b) } E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\varepsilon\pi r^2}$$

2.6.2 Kugelkondensator

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad U_{12} &= \int_{r_1}^{r_2} E(r) \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\
 \Rightarrow Q &= \frac{U_{12} \cdot 4\pi\epsilon}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad \text{mit } Q &= C \cdot U \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4\pi\epsilon}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \\
 E(r) &= \frac{U_{12}}{r^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \Rightarrow E_{\max} = \frac{U_{12}}{r_1 \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right)} = E(r_1) \\
 \text{für } r_2 &\gg r_1 \quad \Rightarrow \quad E_{\max} \approx \frac{U_{12}}{r_1}
 \end{aligned}$$

2.6.2 Zylinderkondensator

- Beispiel: Abschirmhaube an HS-Komponenten

$$r_1 = 0,5 \text{ m}; r_2 = 10 \text{ m} \quad (\text{Abstand Decke, Wand})$$

$$C \approx 60 \text{ pF}; \quad U_{12} = 500 \text{ kV}$$

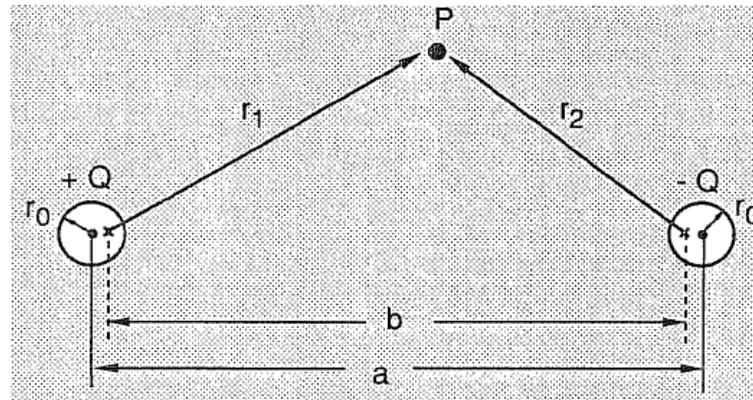
$$\Rightarrow E_{\max} = \frac{500 \text{ kV}}{0,5 \text{ m} \left(1 - \frac{0,5}{10} \right)} = 1052 \frac{\text{kV}}{\text{m}} = 1,05 \frac{\text{kV}}{\text{mm}}$$

$$\text{Näherung: } E_{\max} = 1000 \frac{\text{kV}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{kV}}{\text{mm}}$$

- D.h. die Abstandsvergrößerung hat ab einer bestimmten Größe nur geringen Einfluss auf die Maximalfeldstärke. Eine Verringerung der Feldstärke kann nur durch größere Radien der HS-Elektroden (Abschirmhauben, Toroide) erreicht werden.

2.6.3 Parallele Zylinder

■ Zweidrahtleitung



- Ladungsverteilung ist nicht symmetrisch aus der Leiteroberfläche
 → Ersatz durch zwei exzentrische Linienladungen
 Ladungsschwerpunkt \neq Leitermitte

2.6.3 Parallele Zylinder

- 1) Ladung +Q sind allein vorhanden

$$D_1(r_1) = \frac{\psi_1}{A_1(r_1)} = \frac{Q}{2\pi r_1 l}$$

$$E_1(r_1) = \frac{Q}{2\pi \varepsilon r_1 l}$$

$$\varphi(r_1) = -\int E(r_1) dr_1 = -\frac{Q}{2\pi \varepsilon l} \ln r_1$$

2.6.3 Parallele Zylinder

- 2) Ladung $-Q$ soll vorhanden sein

$$D_2(r_2) = \frac{\psi_2}{A_2(r_2)} = \frac{-Q}{2\pi r_2 l}$$

$$E_2(r_2) = \frac{-Q}{2\pi \epsilon r_2 l}$$

$$\varphi(r_2) = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln r_2$$

$$\varphi(P) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2) = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln r_2 - \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln r_1$$

$$\varphi(P) = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

2.6.3 Parallele Zylinder

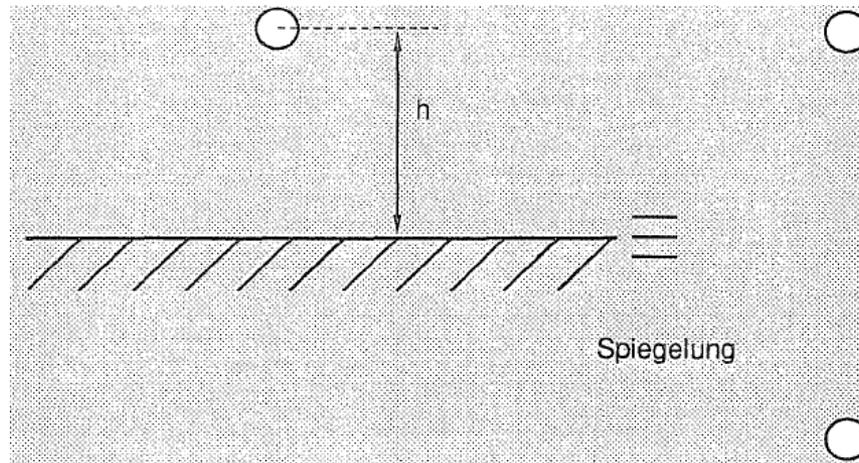
- Erhalten werden Äquipotentiallinien also an Orten mit $r_2/r_1 = \text{konstant}$ (=exzentrische Kreise)

$$E_{\max} = \frac{U \sqrt{\left(\frac{a}{2r_0}\right)^2 - 1}}{(a - 2r_0) \ln \left[\frac{a}{2r_0} + \sqrt{\left(\frac{a}{2r_0}\right)^2 - 1} \right]}$$

- Und für $a \gg r_0$

$$E_{\max} = \frac{U}{2r_0 \ln \frac{a}{r_0}}$$

2.6.4 Leiter-Ebene



mit $a \hat{=} 2h$ und $U \hat{=} 2U$

$$\Rightarrow E_{\max} = \frac{U}{r_0 \ln \frac{2h}{r_0}} \quad C = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{2h}{r_0}}$$

2. Berechnung elektrischer Felder

- 2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform
- 2.2 Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform
- 2.3 Quasistatisches elektrisches Feld (50Hz-Feld der HT)
- 2.4 Potential und Potentialfunktion
- 2.5 Felder ohne Randbedingung
- 2.6 Einfache Felder mit Randbedingung
- 2.7 Laplace'sche Potentialgleichung
- 2.8 Poisson'sche Potentialgleichung
- 2.9 Numerische Feldberechnung
- 2.10 Technische Feldprobleme

2.7 Laplace'sche Potentialgleichung

- Bisher wurden nur einfache Felder isolierter Ladungen und Felder von Elektrodenkonfigurationen hoher Symmetrie (meist 1-dimensional) direkt mit Hilfe von

$$\left. \begin{array}{l} \text{H\u00fcllenintegral} \\ \text{Gau\u00df'sches Gesetz} \\ \text{Quellenst\u00e4rke} \end{array} \right\} \oint \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = Q \quad \text{und } \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

berechnet.

2.7 Laplace'sche Potentialgleichung

- Bei komplizierten Elektrodenkonfigurationen wird zunächst das Potential $\varphi(x,y,z)$ als Lösung der sogenannten Potentialgleichung bestimmt und aus diesem über $E = -\text{grad } \varphi$ die Feldstärke.
- Potentialgleichung = $\Delta \varphi = 0$ $\rightarrow E = -\text{grad } \varphi$
- Zur Herleitung der Potentialgleichung werden die Maxwell'schen Gleichungen in Differentialform benötigt.

2.7 Laplace'sche Potentialgleichung

- Im raumladungsfreien Feld gilt:

$$\eta(x, y, z) = 0 \quad \text{bzw.} \quad Q = 0 \quad (\text{zwischen Elektroden})$$

$$\text{div} D = 0 \quad \text{und mit} \quad D = \varepsilon E$$

$$\Rightarrow \quad \text{div} E = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{div grad} \varphi = 0$$

$$\Delta \varphi = 0$$

2.7 Laplace'sche Potentialgleichung

- z.B.: Kartesische Koordinaten

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

- Zylinderkoordinaten

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

2.7 Laplace'sche Potentialgleichung

- Randwertproblem 1. Art (Dirichlet)

$\varphi(x, y, z)$ derart suchen, dass

$$\varphi_{\text{Elektrode}} = \varphi_m$$

($m = 1, 2, 3 \dots$ Elektroden)

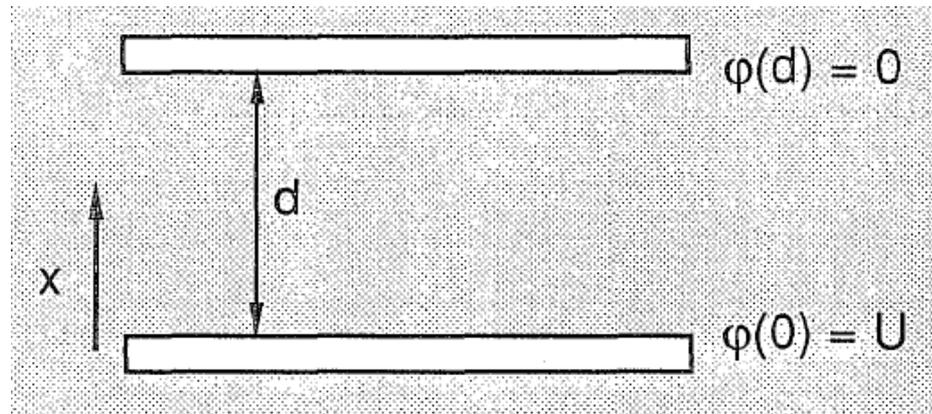
- Randwertproblem 2. Art (Neumann)

$\varphi(x, y, z)$ derart suchen, dass

$$\frac{\partial \varphi_{\text{Elektrode}}}{\partial n} = \text{konstant}$$

2.7 Laplace'sche Potentialgleichung

- z.B.: Lösung durch direkte Integration, Plattenkondensator ohne Randverzerrung



$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}} = 0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = c_1$$

$$\varphi(x) = c_1x + c_2$$

2.7 Laplace'sche Potentialgleichung

■ Randwerte: $x = 0 \Rightarrow \varphi(0) = U$
 $\Rightarrow c_2 = U$
 $x = d \Rightarrow \varphi(d) = 0$
 $\Rightarrow c_1 d + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{U}{d}$
 $\Rightarrow \varphi(x) = U - \frac{U}{d}x$
 $E(x) = -\text{grad} \varphi = \frac{U}{d}$

2. Berechnung elektrischer Felder

- 2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform
- 2.2 Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform
- 2.3 Quasistatisches elektrisches Feld (50Hz-Feld der HT)
- 2.4 Potential und Potentialfunktion
- 2.5 Felder ohne Randbedingung
- 2.6 Einfache Felder mit Randbedingung
- 2.7 Laplace'sche Potentialgleichung
- 2.8 Poisson'sche Potentialgleichung
- 2.9 Numerische Feldberechnung
- 2.10 Technische Feldprobleme

2.8 Poisson'sche Potentialgleichung

$\eta(x, y, z) \neq 0$ bzw. $Q \neq 0$ zwischen Elektroden

$$\operatorname{div} D = \eta \quad \text{und} \quad D = \varepsilon E$$

$$\operatorname{div} E = \frac{\eta}{\varepsilon}$$

Mit $E = -\operatorname{grad} \varphi \Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\eta}{\varepsilon}$

$$\Delta \varphi = -\frac{\eta}{\varepsilon}$$

2.8 Poisson'sche Potentialgleichung

- Jede Lösung hat die Form

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\eta(\mathbf{r}_q)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} dV + \varphi_H(\mathbf{r})$$

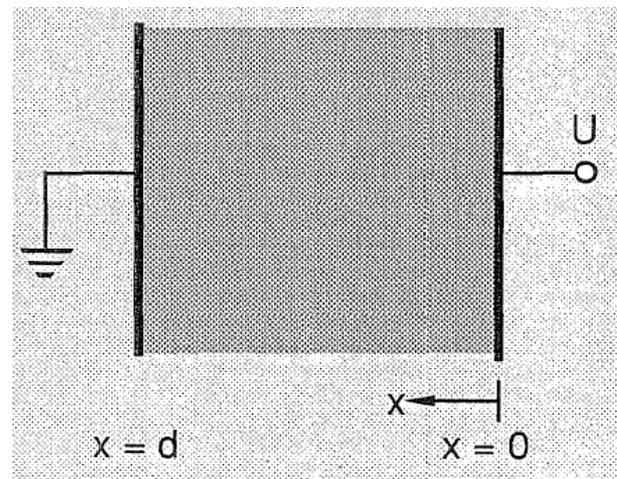
Newton Potential + Lösung der Laplace'schen
Potentialfunktion

- 1) $\varphi_Q(\mathbf{r})$ aus Superpositionsprinzip } $\varphi(\mathbf{r})$
 $\varphi_H(\mathbf{r})$ aus $\Delta\varphi = 0$
- 2) Green'sche Funktionen $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_Q)$
 Neumann'sche Funktionen $N(\mathbf{r}, \mathbf{r}_Q)$
- 3) Numerische Verfahren

2.8 Poisson'sche Potentialgleichung

- Lösung der Poisson'schen Differentialgleichung durch direkte Integration

z.B. Plattenkondensator mit konstanter Raumladungsdichte
(Elektrofilter, stark vereinfacht)



$$\eta(x,y,z) = \text{konstant} = \eta_0$$

2.8 Poisson'sche Potentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} = -\frac{\eta}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\eta}{\varepsilon} x + c_1$$

$$\varphi(x) = -\frac{\eta}{2\varepsilon} x^2 + c_1 x + c_2$$

Randbedingungen:

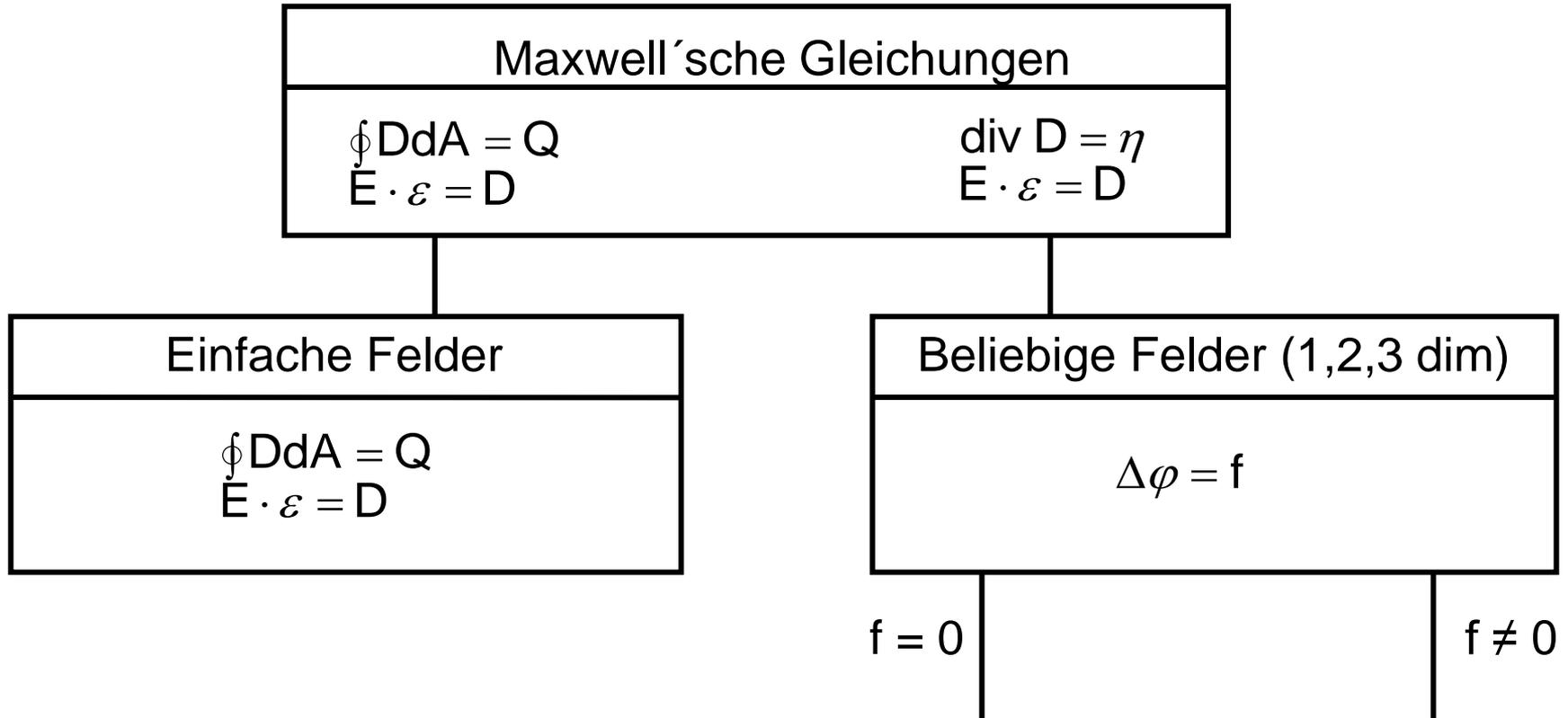
$$x = 0; \quad \varphi = U \quad \Rightarrow c_2 = U$$

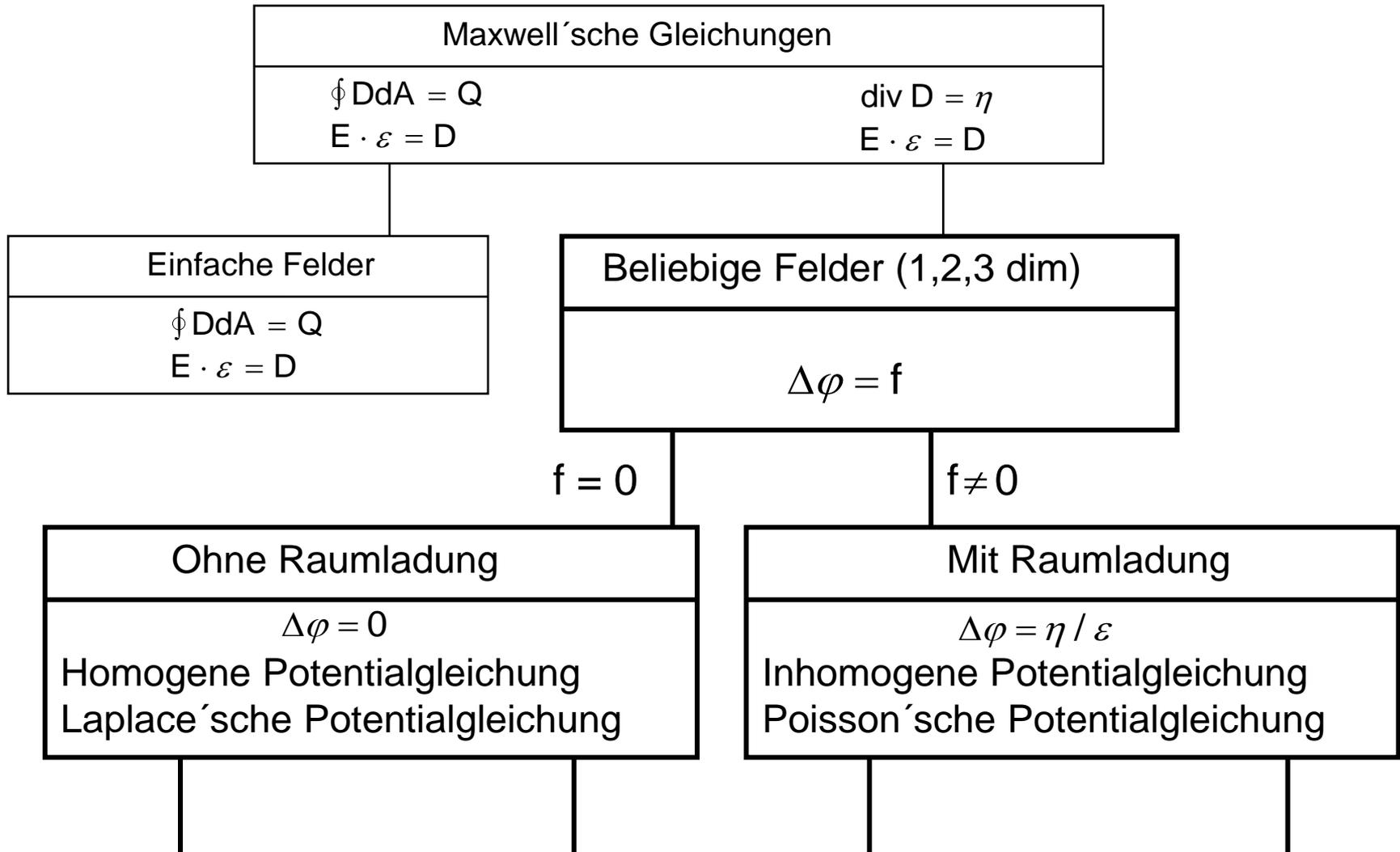
$$x = d; \quad \varphi = 0 \quad \Rightarrow c_1 = \frac{\eta d}{2\varepsilon} - \frac{U}{d}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = -\frac{\eta}{2\varepsilon} x^2 + \frac{\eta d}{2\varepsilon} x - \frac{U}{d} x + U$$

2. Berechnung elektrischer Felder

- 2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform
- 2.2 Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform
- 2.3 Quasistatisches elektrisches Feld (50Hz-Feld der HT)
- 2.4 Potential und Potentialfunktion
- 2.5 Felder ohne Randbedingung
- 2.6 Einfache Felder mit Randbedingung
- 2.7 Laplace'sche Potentialgleichung
- 2.8 Poisson'sche Potentialgleichung
- **2.9 Numerische Feldberechnung**
 - 2.9.1 Ersatzladungsverfahren
 - 2.9.2 Differenzenverfahren
 - 2.9.3 Finite-Elemente-Verfahren
 - 2.9.4 Monte Carlo Verfahren
- 2.10 Technische Feldprobleme





Ohne Raumladung

$\Delta\varphi = 0$

Homogene Potentialgleichung
Laplace'sche Potentialgleichung

Mit Raumladung

$\Delta\varphi = \eta / \varepsilon$

Inhomogene Potentialgleichung
Poisson'sche Potentialgleichung

Analytische
Verfahren

Numerische
Verfahren

Numerische
Verfahren

Analytische
Verfahren

1- dimensional	Indirekte Integration
2- dimensional	konforme Abbildungen, Spiegelung, Separation der Variablen, Green'sche Funktion, Variationsrechnung, Fourier-Entwicklung, kleinste Fehlerquadrate
3- dimensional	Spiegelung, Separation der Variablen, Green'sche Funktion, Variationsrechnung, Fourier-Entwicklung, kleinste Fehlerquadrate

Ohne Raumladung

$$\Delta\varphi = 0$$

Homogene Potentialgleichung
Laplace'sche Potentialgleichung

Analytische
Verfahren

Numerische
Verfahren

1 dim

2 dim

3 dim

Ersatzladungsverfahren, Differenzenverfahren,
Finite Elemente Verfahren, Momentenverfahren,
Monte Carlo Verfahren

Mit Raumladung

$$\Delta\varphi = \eta / \varepsilon$$

Inhomogene Potentialgleichung
Poisson'sche Potentialgleichung

Numerische
Verfahren

Analytische
Verfahren

Lösung der homogenen Potentialgleichung

Harmonisches Potential
 $\varphi_H(r)$

Lösung der inhomogenen Potentialgleichung

Newton Potential
(Potential der Raumladung allein ohne Rand)

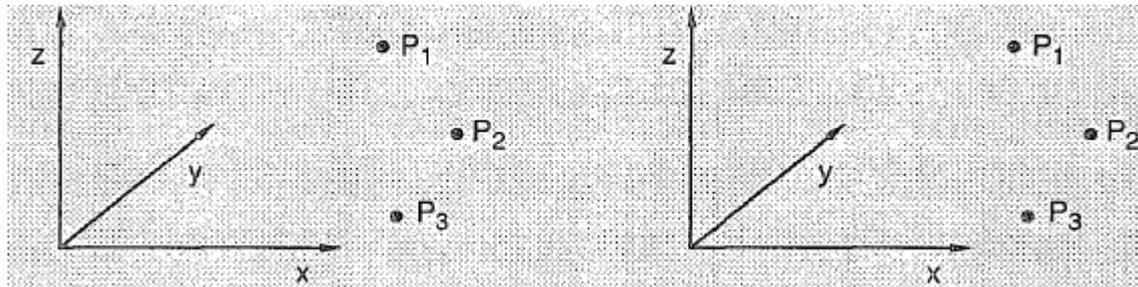
+

Harmonisches Potential

$$\varphi(r) = \varphi_Q(r) + \varphi_H(r)$$

2.9 Numerische Feldberechnung

- Analytische Verfahren \rightarrow Potentialfunktion $\varphi(x, y, z)$
- Numerische Verfahren \rightarrow Potentiale in diskreten Punkten φ_v



numerisch

$$\varphi_1 = 3V$$

$$\varphi_2 = 5V$$

$$\varphi_3 = 7V$$

analytisch

$$\varphi = x + y + z$$

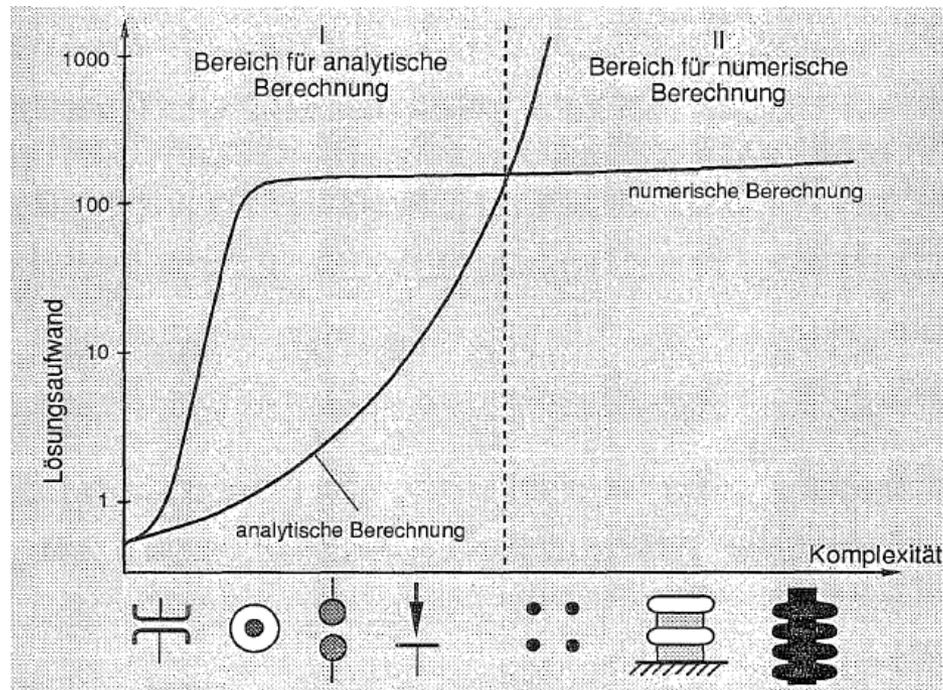
$$\varphi_1 = 3V$$

$$\varphi_2 = 5V$$

$$\varphi_3 = 7V$$

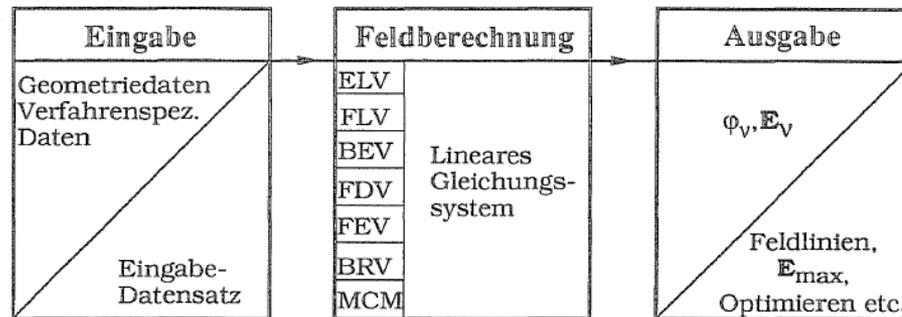
2.9 Numerische Feldberechnung

■ Einsatzbereiche der numerischen Feldberechnung



2.9 Numerische Feldberechnung

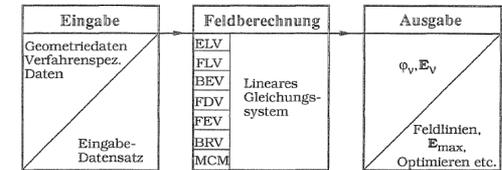
■ Gliederung der numerischen Feldberechnung



■ Grobstruktur der numerischen Feldberechnung:

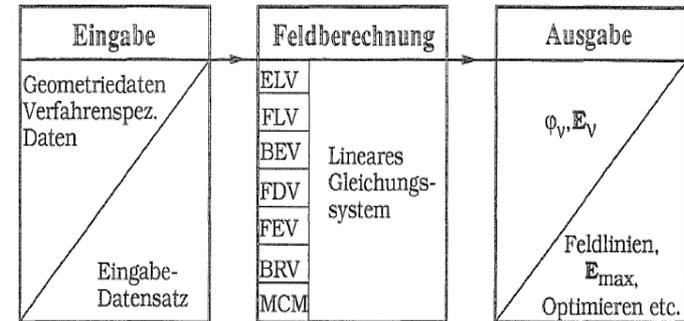
- ELV: Ersatzladungsverfahren
- FLV: Flächenladungsverfahren
- BEV: Boundary-Element-Verfahren
- FDV: Finite-Differenzen-Verfahren
- FEV: Finite-Elemente-Verfahren
- BRV: Bilderrahmen-Verfahren
- MCM: Monte-Carlo-Methode

2.9 Numerische Feldberechnung



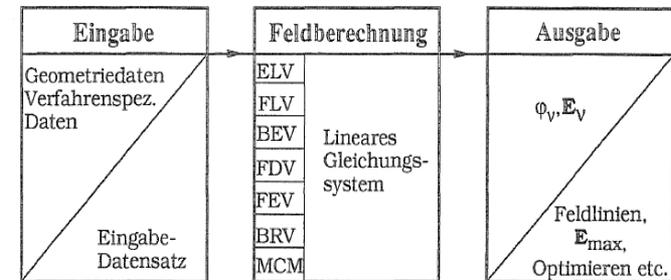
- Block 1 (engl.: pre-processing) beinhaltet die effiziente Aufbereitung der physikalischen Aufgabenstellung in eine für den Rechner akzeptable Form, m.a.W. die anwenderfreundliche Erstellung des Datensatzes (Problemdefinition).
- Block 2 (engl.: processing) befasst sich mit der verfahrensspezifischen Berechnung der Elemente der jeweiligen Koeffizientenmatrix und der effizienten Lösung des zugehörigen Gleichungssystems.
- Block 3 (engl.: post-processing) leistet die anwenderfreundliche Auswertung und Darstellung des Rechenergebnisses in Form von Äquipotential- und Feldstärkelinien, der Darstellung von Potential- und Feldstärkeverteilungen längs vorgegebener Raumkurven usw.

2.9 Numerische Feldberechnung



- Die verschiedenen Verfahren der numerischen Feldberechnung lassen sich folgenden Gruppen zuordnen:
 - Differenzenverfahren
 - Integralverfahren (Superpositionsverfahren)
 - Statistische Verfahren (Monte Carlo – Verfahren)

2.9 Numerische Feldberechnung



- Zu den Differenzenverfahren zählen:

- Finite-Differenzen-Verfahren
- Finite Elemente Verfahren

FDV

FEV

- Zu den Integralverfahren zählen:

- Ersatzladungsverfahren
- Flächenladungsverfahren
- Boundary Element Verfahren

ELV

FLV

BEV

- Zu den statistischen Verfahren zählt:

- Monte Carlo Methode

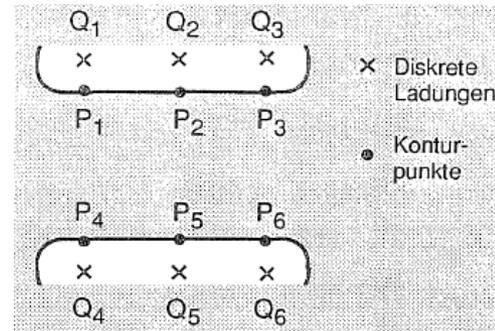
MCM

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

Grundprinzip

- Dieses Verfahren ersetzt die physikalische unendlich fein verteilte Ladung auf der Elektrodenoberfläche durch eine endliche Anzahl diskreter Ladungen innerhalb der ursprünglichen Elektrode.
- Durch diese diskreten Ladungen wird das Feld auf der Elektrodenoberfläche und im Elektrodenzwischenraum (Feldraum) nachgebildet.
- Innerhalb der Elektroden ist der Raum feldfrei, d.h. hier darf ausgehend von den Ersatzquellen die Feldstärke nicht berechnet werden.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren



- Die Größe der Ladungen $Q_1 \dots Q_6$ ist nun so zu bestimmen, dass außerhalb der Elektroden das Feld dieser diskreten Ladungen dem Feld der in Wirklichkeit vorhandenen Oberflächenladungen gleich ist. Gesucht sind also Ladungen, die die Randbedingungen (ein gegebenes Elektrodenpotential) erfüllen.
- Dazu wird an der Oberfläche des Körpers (Elektroden) eine Anzahl von Konturpunkten vorgegeben, die gleich der Anzahl der vereinbarten Ladungen im Inneren der Elektrode ist.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Der Beitrag jeder Punktladung Q_i zum Potential in einem Aufpunkt P_k außerhalb und auf der Elektrode bestimmt sich zu:

$$\varphi_{ki}(r_{ki}) = \frac{1}{4\pi\epsilon|r_{ki}|} \cdot Q_i = p_{ki}Q_i$$

mit r_{ki} = Abstandsvektor zwischen Ladung und Aufpunkt

- Bei der praktischen Berechnung der Potentialkoeffizienten ist r_{ki} vom gewählten Koordinatensystem abhängig, z.B. ergibt sich in kartesischen Koordinaten für eine Punktladung:

$$\varphi_{ki}(x, y, z) = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}} = p_{ki}Q_i$$

mit x_i, y_i, z_i = Koordinaten der Punktladung
 und x_k, y_k, z_k = Koordinaten des Aufpunkts

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Das gesamte Potential φ_k im Aufpunkt ergibt sich nach dem Superpositionsprinzip als Summe der Beiträge aller n Ersatzladungen

$$\varphi_k(x, y, z) = \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_i$$

- Für den Konturpunkt P_k ist das Potential bekannt (Elektrodenpotential). Für diese Punkte gilt

$$\sum_{i=1}^n p_{ki} Q_i = \varphi_E$$

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Wird für jeden Konturpunkt eine solche Gleichung aufgestellt, wird ein lineares Gleichungssystem mit quadratischer Koeffizientenmatrix erhalten

$$\begin{bmatrix} p_{11} & \dots & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & \dots & \dots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & \dots & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{E1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_{En} \end{bmatrix}$$

- Die Auflösung des Gleichungssystems liefert die Größe der Ladungen Q_i , die in den Konturpunkten das vorgegebene Potential φ_E erzeugen. Damit ist aber nicht gewährleistet, dass in anderen Punkten auf der Kontur ebenfalls die Randbedingung $\varphi = \varphi_E$ erfüllt ist.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Ist die Größe der Ladungen bekannt, so kann das Potential in jedem beliebigen Punkt des Feldraums berechnet werden.
- Die Genauigkeit dieser Berechnung hängt jedoch davon ab, wie gut durch die ermittelte Ladungsverteilung die Randbedingung in **allen** Punkten auf der Kontur erfüllt wird.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Die Komponenten der elektrischen Feldstärke in einem beliebigen Punkt berechnen sich zu:

- $E_x = \sum_{i=1}^n f_{xki} \cdot Qi$

- $E_y = \sum_{i=1}^n f_{yki} \cdot Qi$

- $E_z = \sum_{i=1}^n f_{zki} \cdot Qi$

- Dabei sind f_{xki} , f_{yki} , f_{zki} die negativen Ableitungen des Potentialkoeffizienten p_{ki} nach den Koordinaten x , y , z .

- $f_{xki} = -\frac{dp_{ki}}{dx}$

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Bei der praktischen Anwendung des Ersatzladungsverfahrens wird immer eine unendlich ausgedehnte, leitende Ebene bei $y = 0$ berücksichtigt, auf der das Potential den Wert Null annimmt.
- Dies geschieht dadurch, dass zu jeder Ersatzladung mit den Koordinaten x, y, z eine Spiegelladung gleicher Größe aber umgekehrten Vorzeichens an der Stelle $(x, -y)$ angenommen wird.
- Der Beitrag dieser Spiegelladungen zum Potential kann direkt in den Ausdruck für den Potentialkoeffizienten eingebracht werden, so dass durch die Spiegelladungen keine neuen Variablen im Gleichungssystem entstehen.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

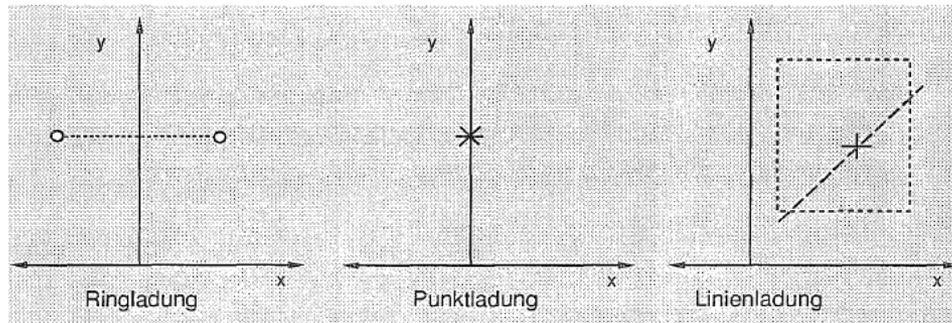
- Beispielsweise wird für den Potentialkoeffizienten einer Punktladung unter Berücksichtigung ihrer Spiegelladung erhalten

$$p_{ki} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_k + x_i)^2 + (y_k + y_i)^2}} \right]$$

- Durch die Berücksichtigung von Spiegelladungen wird einerseits der Nullpunkt des Potentials festgelegt und darüberhinaus sichergestellt, dass im gesamten System die Summe aller Ladungen gleich Null ist.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

Arten von Ersatzladungen



- Die Art der verwendeten Ersatzladungen hängt von der Art des Feldproblems ab.
- Zur Nachbildung ebener Probleme, bei denen sich die Feldgrößen senkrecht zur Zeichenebene nicht ändern, werden unendlich lange Linienladungen verwendet, die senkrecht zur Zeichenebene verlaufen und diese in einem Punkt durchstoßen.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

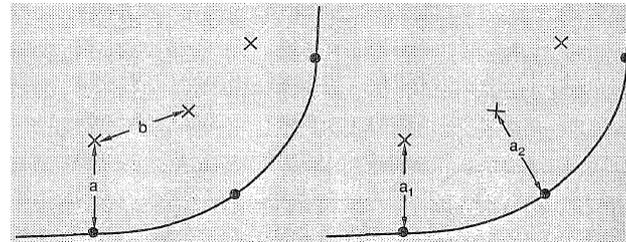
- Bei **rotationssymmetrischen** Problemen kommen Ringladungen zur Anwendung, deren Mittelpunkt die Rotationsachse ist. Auf der Rotationsachse selbst entarten die Ringladungen zu Punktladungen.
- Dreidimensionale Feldprobleme ohne generelle Rotationssymmetrie, die jedoch aus rotationssymmetrischen Teilen bestehen, können durch segmentierte Ringladungen oder durch Ringladungen mit längs des Umfangs variabler Ladungsdichte nachgebildet werden.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Die Potentialkoeffizienten von Punkt- und Linienladungen können analytisch berechnet werden; so ergibt sich z.B. der Potentialkoeffizient einer Punktladung recht einfach nach obiger Gleichung.
- Der Ausdruck für den Potentialkoeffizienten einer Ringladung dagegen enthält elliptische Integrale, die numerisch gelöst werden müssen

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

Positionierung der Ersatzladungen



- Die **Güte der Nachbildung** einer Elektrodenanordnung durch Ersatzladungen hängt entscheidend von der Anzahl und Positionierung dieser Ladungen ab. Prinzipiell verbessert sich die Nachbildung mit steigender Ladungszahl. Werden jedoch zu viele Ladungen verwendet, wird aufgrund numerischer Probleme wieder eine Verschlechterung erlangt.
- Außerdem steigt die Größe der Potentialkoeffizientenmatrix und die zur Lösung des Gleichungssystems benötigte Rechenzeit sehr stark mit der Ladungszahl an.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Die **Positionierung** der Ladungen erfordert eine gewisse Erfahrung. Es lassen sich jedoch einige Grundregeln angeben, bei deren Einhaltung recht gute Ergebnisse erzielt werden:
 - Das Verhältnis zwischen dem Abstand a (Konturpunkt \rightarrow Ladung) und dem Abstand b (zwischen zwei Ladungen) sollte nicht zu stark vom Wert 1 abweichen.
 - Die Abstände a_1 und a_2 zweier benachbarter Ladungskonturpunktpaare sollten sich nicht zu stark unterscheiden.
 - Bei kreisförmigen Konturabschnitten werden gute Nachbildungen erhalten, wenn die Ladungen etwa auf halbem Radius positioniert werden.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- In Bereichen von besonderem Interesse (z.B. an Spitzen) können die Ladungen verdichtet, in weniger interessanten Bereichen dagegen auseinandergezogen werden. Dabei ist darauf zu achten, dass der Übergang möglichst gleichmäßig verläuft.
- Die Ladungen (und auch die Konturpunkte) dürfen nicht zu eng gesetzt werden, da sich die einzelnen Gleichungen sonst nicht mehr stark unterscheiden und die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems nahezu singulär wird, Insbesondere ist bei der Digitalisierung der Ladungen darauf zu achten, dass nicht zwei Ladungen (oder Konturpunkte) an derselben Stelle digitalisiert werden.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

Berücksichtigung dielektrischer Grenzschichten

An einer ladungsfreien dielektrischen Grenzschicht gelten im elektrostatischen Feld die Beziehungen:

$$\text{a) } \quad \text{Div } D = 0 \quad \Rightarrow Dn_1 = Dn_2$$

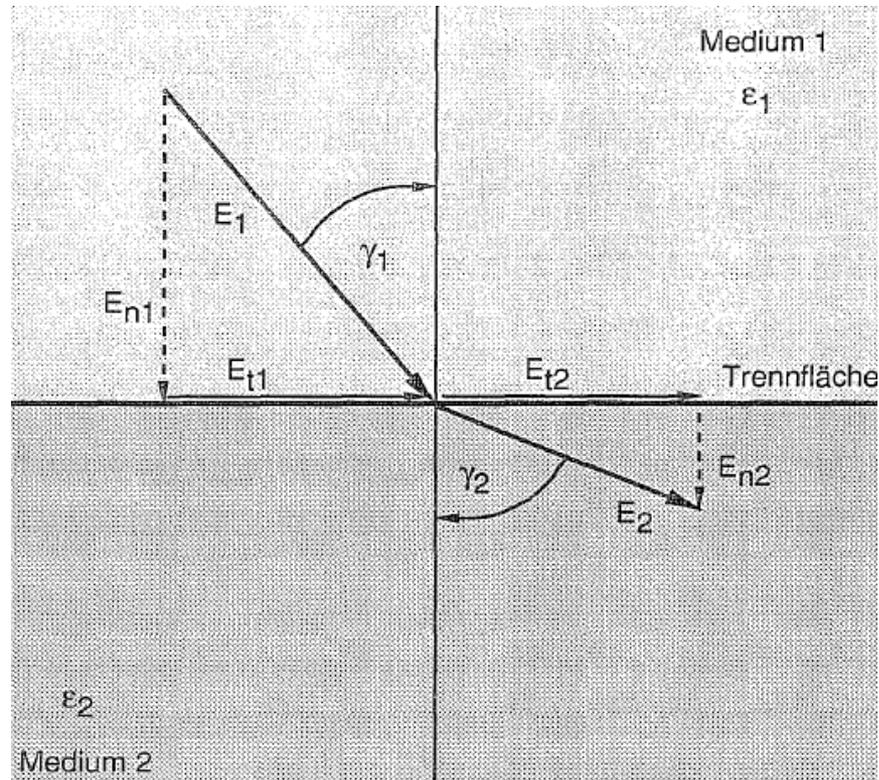
$$\Rightarrow \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad \Rightarrow \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\text{b) } \quad \text{Rot } E = 0 \quad \Rightarrow Et_1 = Et_2$$

$$\text{c) } \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (\text{Stetigkeit des Potentials})$$

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

Grenzbedingung an einer dielektrischen Grenzfläche



2.9.1 Ersatzladungsverfahren

Z.B.

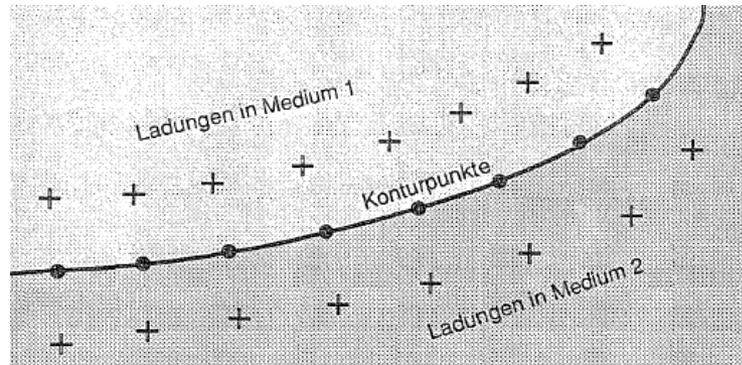
$$\begin{aligned} \varepsilon_{r1} &= 1, & \varepsilon_{r2} &= 3 \\ E_{t1} &= E_{t2}, & E_{n1} &= 3E_{n2} \end{aligned}$$

d.h. das Feld wird im dichteren Medium ($\varepsilon >$) vom Lot weg gebrochen
 (Vorsicht! Nicht verwechseln mit Licht- dort wird es zum Lot hin gebrochen
 wegen $n \perp E$)

- Diese Beziehungen stellen die Randbedingungen für die Grenzschicht dar. Es genügt jedoch, neben Bedingung a) eine der Bedingungen b) oder c) zu erfüllen. In einem Konturpunkt einer Grenzschicht sind demnach zwei Gleichungen aufzustellen. Damit das Gleichungssystem eindeutig lösbar bleibt, müssen **pro Konturpunkt zwei Ersatzladungen** positioniert werden.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Ladungen und Konturpunkte an der Grenzschicht



- Die Ersatzladungen werden in vier Gruppe eingeteilt:
 - Ladungen von Elektroden, die an Medium 1 grenzen (Q_{e1})
 - Ladungen von Elektroden, die an Medium 2 grenzen (Q_{e2})
 - Grenzschichtladungen in Medium 1 (Q_{d1})
 - Grenzschichtladungen in Medium 2 (Q_{d2})

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Zur Berechnung des Potentials in einem Punkt im *Medium 1* werden die Potentialanteile der Ladungen Q_{e1} , Q_{e2} , Q_{d2} aufsummiert, zur Berechnung des Potentials in einem Punkt in **Medium 2** die Anteile der Ladungen Q_{e1} , Q_{e2} , Q_{d1} .
- Dies ist notwendig, da der Ort einer Ladung einen Pol der Potentialfunktion darstellt, so dass zur Berechnung des Potentials in einem Teilbereich des Feldgebiets niemals Ladungen verwendet werden dürfen, die im selben Teilbereich liegen.
- Das Gleiche gilt für die Berechnung der Feldstärke.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- In einem Konturpunkt der Grenzschicht gilt:

$$\varphi(x, y, z)_{\text{Medium1}} = \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{e1} + \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{e2} + \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{d2}$$

$$\varphi(x, y, z)_{\text{Medium2}} = \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{e1} + \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{e2} + \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{d1}$$

$$E_{n1}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{e1} + \sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{e2} + \sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{d2}$$

$$E_{n2}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{e1} + \sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{e2} + \sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{d1}$$

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Die Koeffizienten f_{nki} ergeben mit der i -ten Ladung multipliziert den Anteil dieser Ladung an der Normalkomponente der Feldstärke im Konturpunkt k . Aus Randbedingung a) folgt die Gleichung:

$$v_{\varepsilon} E_{n2} - E_{n1} = 0 \quad \left(v_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)$$

- bzw. mit Ersatzladungen

$$v_{\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{e1} + \sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{e2} + \sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{d2} \right) - \left(\sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{e1} + \sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{e2} + \sum_{i=1}^n f_{nki} Q_{d1} \right) = 1$$

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Aus Randbedingung c)

$$\sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{d2} - \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{d1} = 0$$

Für jeden Konturpunkt auf der Grenzschicht werden zwei derartige Gleichungen aufgestellt. Die Gleichungen für Elektrodenkonturpunkte, die an Medium 1 grenzen, laut

$$\sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{e1} + \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{e2} + \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{d2} = U_{\text{Elektrode}}$$

Und für Elektrodenkonturpunkte die an Medium 2 grenzen,

$$\sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{e1} + \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{e2} + \sum_{i=1}^n p_{ki} Q_{d1} = U_{\text{Elektrode}}$$

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Wird für jeden Konturpunkt die entsprechenden Gleichungen aufgestellt, so wird wieder ein lineares Gleichungssystem mit quadratischer Koeffizientenmatrix erreicht. Nach Lösung dieses Systems sind Potential und Feldstärke in jedem Punkt des Feldraums berechenbar.

$$\begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} & \underline{0} & \underline{C} \\ \underline{D} & \underline{E} & \underline{F} & \underline{0} \\ \underline{G} & \underline{H} & \underline{I} & \underline{J} \\ \underline{0} & \underline{0} & -\underline{p}_{ki} & \underline{p}_{ki} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{e1} \\ Q_{e2} \\ Q_{d1} \\ Q_{d2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit:

$$\begin{aligned}
 \underline{G} &= (\nu_{\epsilon} - 1) f_{nki} \\
 \underline{H} &= (\nu_{\epsilon} - 1) f_{nki} \\
 \underline{I} &= \nu_{\epsilon} \cdot f_{nki} \\
 \underline{J} &= -f_{nki}
 \end{aligned}$$

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

Kontrollmöglichkeiten

- Die Richtigkeit der Feldgrößen im Feldraum kann nicht explizit überprüft werden, wohl aber die Einhaltung der Randbedingungen. Dies genügt jedoch, da bei erfüllter Laplace'scher Potentialgleichung und exakt erfüllten Randbedingungen auch das Feldproblem exakt gelöst ist (jede Lösung der Laplace'schen Potentialgleichung ist eindeutig).
- Beim Ersatzladungsverfahren sind die Randbedingungen nur in den anfänglich gewählten Konturpunkten exakt erfüllt, in allen anderen Punkten auf der Kontur sind sie mehr oder minder stark verletzt.
- Diese Abweichungen dienen als Maß für die Güte der Nachbildung.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Folgende Fehler können berechnet werden:

- Potentialfehler an den Elektroden

Der Fehler berechnet sich als Differenz zwischen dem numerisch berechneten Potential eines beliebigen Punktes auf der Elektrodenoberfläche (Istwert) und dem bekannten, vorgegebenen Elektrodenpotential (Sollwert):

$$F_{abs} = |\varphi_{ber} - \varphi_{Elek}|$$

$$F_{rel} = \frac{|\varphi_{ber} - \varphi_{Elek}|}{\varphi_{Elek}}$$

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Winkelfehler an den Elektroden

Im elektrostatischen Feld steht der Vektor E der elektrischen Feldstärke immer senkrecht auf der Oberfläche von Elektroden. Ist der Winkel der Konturnormalen bekannt, so kann die Differenz

$$F_{abs} = |\angle Normale - \angle E|$$

als sehr empfindliches Kriterium für die Güte der Nachbildung verwendet werden

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Sprung der Feldstärke-Normalkomponente an der Grenzschicht
 An einer ladungsfreien dielektrischen Grenzschicht verhalten sich die Normalkomponenten der elektrischen Feldstärke umgekehrt wie die Dielektrizitätszahlen der angrenzenden Medien. Ist v_ε das Verhältnis $\varepsilon_2/\varepsilon_1$, so berechnet sich der Fehler zu:

$$F_{abs} = v_\varepsilon - \frac{E_{n1}}{E_{n2}} \quad F_{rel} = \frac{v_\varepsilon - \frac{E_{n1}}{E_{n2}}}{v_\varepsilon}$$

- Stetigkeit der Feldstärke-Tangentialkomponente an der Grenzschicht

Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke geht stetig über. Für den Fehler werden folgende Formeln abgeleitet:

$$F_{abs} = |E_{t1} - E_{t2}| \quad F_{rd} = \frac{|E_{t1} - E_{t2}|}{Et_1}$$

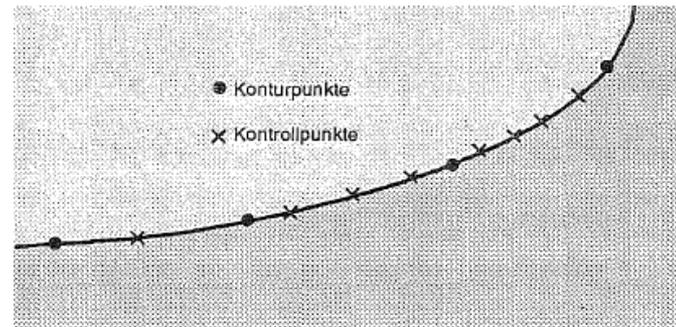
2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Stetigkeit des Potentials an der Grenzschicht
Zur Berechnung des Fehlers wird in einem Punkt an der Grenzschicht zunächst das Potential φ_1 unter der Annahme, dass der Punkt in Medium 1 liegt, berechnet.
Anschließend wird das Potential φ_2 im selben Punkt berechnet, wobei jedoch angenommen wird, dass der Punkt im Medium 2 liegt. Der Fehler ergibt sich dann zu

$$F_{abs} = |\varphi_1 - \varphi_2| \qquad F_{rd} = \frac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{\varphi_1}$$

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Zur Untersuchung der Güte einer Nachbildung werden auf der Kontur von Elektroden und Grenzschicht zunächst Kontrollpunkte angeordnet. Es empfiehlt sich, diese Punkte in der Mitte zwischen zwei Konturpunkten zu positionieren, da hier im allgemeinen der größte Fehler zu erwarten ist.
- Wird mehr als ein Kontrollpunkt zwischen zwei Konturpunkte positioniert, so sollte darauf geachtet werden, dass sich in der Nähe der Mitte ein Kontrollpunkt befindet.



Anordnung von Kontrollpunkten

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

Ersatzladungsverhalten

- Vorteil:
 - offene Feldgeometrie möglich
 - Fehler bekannt und auf Rädern (Elektroden) maximal
- Nachteil:
 - Matrix voll (sehr stark) besetzt => Speicherbedarf
 - Schwierigkeit bei mehr als 2 Dielektrika
 - Schwierigkeit bei dünnen Elektroden (Steuerbeläge)

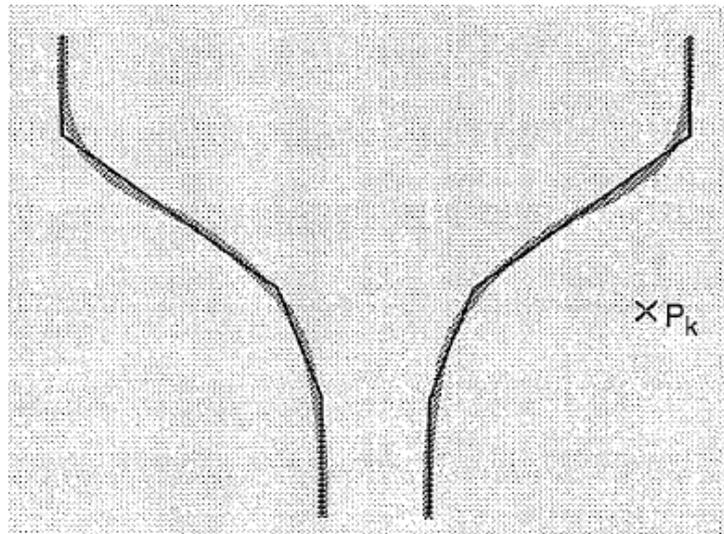
2.9.1 Ersatzladungsverfahren

Weiterentwicklung des Ersatzladungsverhaltens:
das Flächenladungsverhalten

- Beim Flächenladungsverfahren wird die Flächenladung auf der Elektrodenoberfläche nicht durch diskrete Ladungen ersetzt, sondern direkt zur Berechnung des Potentials verwendet.
- Dazu wird zunächst ein Ansatz für die unbekannte Ladungsdichteverteilung auf der Elektrodenoberfläche gemacht. Mögliche Ansätze sind Treppenfunktionen, Dreiecksfunktionen und Spline-Funktionen.
- Zur Berechnung der unbekanntenen Koeffizienten dieser Funktionen wird auch hier in bestimmten Konturpunkten die Erfüllung der Randbedingungen gefordert.

2.9.1 Ersatzladungsverfahren

- Dadurch entsteht ein Gleichungssystem, nach dessen Lösung die Ladungsdichteverteilung bekannt ist. Anschließend kann durch Integration das Potential in jedem beliebigen Punkt berechnet werden.



2.9.1 Ersatzladungsverfahren

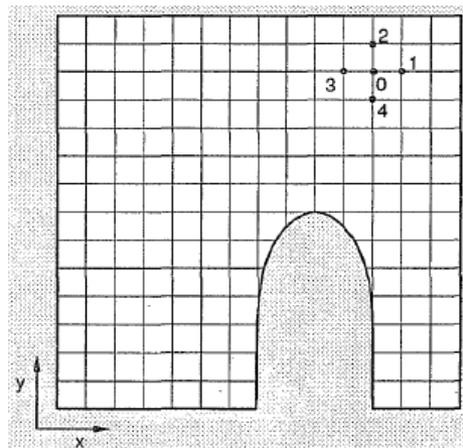
$$\varphi_{ki} = \iint_{A_i} \frac{\rho_{Ai}}{4 \pi \varepsilon r_{ki}} dA$$

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^n \varphi_{ki} \Rightarrow LGS$$

- Die Kontrolle erfolgt wie beim Ersatzladungsverfahren. Mit dem Flächenladungsverfahren können auch scharfkantige Elektroden und dünne Steuerbeläge nachgebildet werden. Falls keine Rotations-symmetrie vorliegt, müssen die Ringladungen segmentiert werden.
- Als Weiterentwicklung des Flächenladungsverfahrens benutzen viele kommerzielle Feldberechnungsprogramme heute das **Boundary Element Verfahren** (BEV). Das BEV verwendet isoparametrische (gekrümmte) Flächenelemente.

2.9.2 Differenzenverfahren

- Beim Differenzenverfahren wird der Feldraum zunächst mit einem äquidistanten Punktgitter überzogen. Möglich und sinnvoll sind hierbei quadratische, dreieckige oder hexagonale Gitternetze.



- Gesucht: Iterationsformel für $\varphi(0) = f(\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4))$
- Die Potentialfunktion wird approximiert durch eine Taylorreihe, die nach dem 2. Glied abgebrochen wird.

2.9.2 Differenzenverfahren

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) = & \varphi(x_0,y_0) + (x-x_0) \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x_0,y_0} + (y-y_0) \left. \frac{d\varphi}{dy} \right|_{x_0,y_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2} \left. \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|_{x_0,y_0} \\ & + (x-x_0)(y-y_0) \left. \frac{d^2\varphi}{dx dy} \right|_{x_0,y_0} + \frac{(y-y_0)^2}{2} \left. \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right|_{x_0,y_0} \end{aligned}$$

Mit $(x-x_0) = h$ und $(y-y_0) = h$ folgt für die Potentiale in den Punkten 1 bis 4

$$\varphi_1 = \varphi(h,0) = \varphi_0 + h \frac{d\varphi}{dx} + 0 + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 0 + 0$$

$$\varphi_2 = \varphi(0,h) = \varphi_0 + 0 + h \frac{d\varphi}{dy} + 0 + 0 + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dy^2}$$

$$\varphi_3 = \varphi(-h,0) = \varphi_0 - h \frac{d\varphi}{dx} + 0 + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 0 + 0$$

$$\varphi_4 = \varphi(0,-h) = \varphi_0 + 0 - h \frac{d\varphi}{dy} + 0 + 0 + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dy^2}$$

2.9.2 Differenzenverfahren

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &= 4 \varphi_0 + h^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + h^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} \\
 &= 4 \varphi_0 + h^2 \underbrace{\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right)}_{\Delta\varphi = 0}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 4 \varphi_0 \quad \text{"Viereckformel"}$$

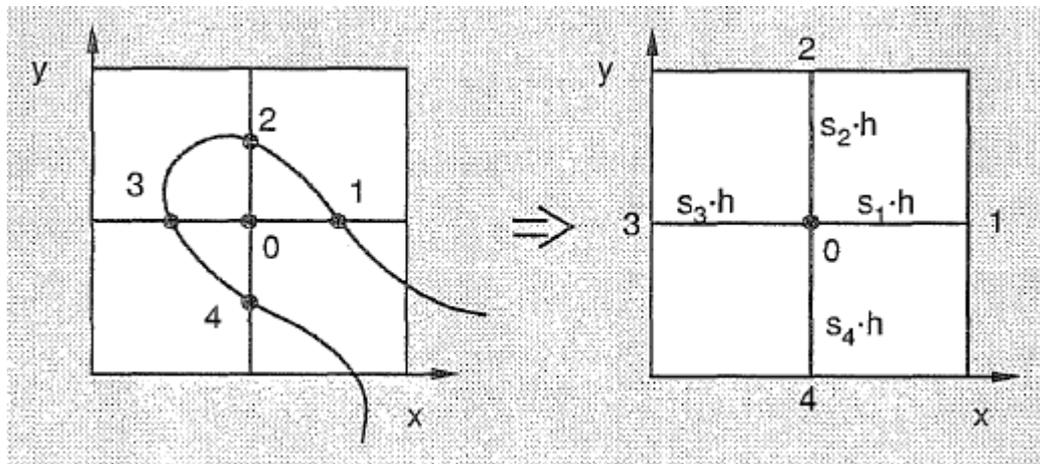
$$\varphi_0 = \frac{1}{4} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$$

- Sind die Potentiale φ_1 bis φ_4 gegeben, z.B. als Randwerte, kann φ_0 berechnet werden. Die exakte Laplace'sche Differentialgleichung wird also bei diesem Ansatz durch ein System von Differenzengleichungen ersetzt. Der Fehler hierbei ist umso geringer, je kleiner h gewählt wird.

2.9.2 Differenzenverfahren

Viereckformel für nicht konstante Gitterabstände

- In Randgebieten an den Elektroden kommt es oft vor, dass die Gitterabstände ungleich gewählt werden müssen. Dieses Problem führt auf die allgemeine Viereckformel, deren Spezialfall (gleiche Abstände) die bekannte Viereckformel beinhaltet.



2.9.2 Differenzenverfahren

- Zuerst wird das gezeigte Randproblem auf ein reguläres Gitter zurückgeführt, indem die relativen Gitterabstände s_1, s_2, s_3, s_4 so definiert werden.

- $$\varphi_1 = \varphi_0 + s_1 \cdot h \cdot \varphi_x + \frac{1}{2} s_1^2 \cdot h^2 \cdot \varphi_{xx} \quad (1)$$

- $$\varphi_2 = \varphi_0 + s_2 \cdot h \cdot \varphi_y + \frac{1}{2} s_2^2 \cdot h^2 \cdot \varphi_{yy} \quad (2)$$

- $$\varphi_3 = \varphi_0 - s_3 \cdot h \cdot \varphi_x + \frac{1}{2} s_3^2 \cdot h^2 \cdot \varphi_{xx} \quad (3)$$

- $$\varphi_4 = \varphi_0 - s_4 \cdot h \cdot \varphi_y + \frac{1}{2} s_4^2 \cdot h^2 \cdot \varphi_{yy} \quad (4)$$

2.9.2 Differenzenverfahren

- Die Gleichungen werden derart erweitert, dass die Terme mit φ_x , φ_y , φ_{xx} , φ_{yy} gleiche Koeffizienten haben.

- $$s_2 s_3 s_4 \cdot \varphi_1 = s_2 s_3 s_4 \cdot \varphi_0 + s_1 s_2 s_3 s_4 \cdot h \cdot \varphi_x + \frac{1}{2} s_1^2 s_2 s_3 s_4 \cdot h^2 \cdot \varphi_{xx} \quad (5)$$

- $$s_1 s_3 s_4 \cdot \varphi_2 = s_1 s_3 s_4 \cdot \varphi_0 + s_1 s_2 s_3 s_4 \cdot h \cdot \varphi_y + \frac{1}{2} s_1 s_2^2 s_3 s_4 \cdot h^2 \cdot \varphi_{yy} \quad (6)$$

- $$s_1 s_2 s_4 \cdot \varphi_1 = s_1 s_2 s_4 \cdot \varphi_0 + s_1 s_2 s_3 s_4 \cdot h \cdot \varphi_x + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3^2 s_4 \cdot h^2 \cdot \varphi_{xx} \quad (7)$$

- $$s_1 s_2 s_3 \cdot \varphi_1 = s_1 s_2 s_3 \cdot \varphi_0 + s_1 s_2 s_3 s_4 \cdot h \cdot \varphi_y + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 s_4^2 \cdot h^2 \cdot \varphi_{yy} \quad (8)$$

2.9.2 Differenzenverfahren

- Addition von (5) und (7) bzw. (6) und (8), sowie ausklammern gleicher Größen ergibt

- $s_2 s_4 (s_3 \cdot \varphi_1 + s_1 \cdot \varphi_3) = s_2 s_4 (s_1 + s_3) \cdot \varphi_0 + \frac{1}{2} h^2 \cdot \varphi_{xx} \cdot s_1 s_2 s_3 s_4 (s_1 + s_3) \quad (9)$

- $s_1 s_3 (s_4 \cdot \varphi_2 + s_2 \cdot \varphi_4) = s_1 s_3 (s_2 + s_4) \cdot \varphi_0 + \frac{1}{2} h^2 \cdot \varphi_{yy} \cdot s_1 s_2 s_3 s_4 (s_2 + s_4) \quad (10)$

2.9.2 Differenzenverfahren

- Division von (9) mit $(s_1 + s_3)$ und (10) mit $(s_2 + s_4)$ und anschließende Addition von (9) und (10) ergibt

$$\frac{s_2 s_4}{s_1 + s_3} (s_3 \varphi_1 + s_1 \varphi_3) + \frac{s_1 s_3}{s_2 + s_4} (s_4 \cdot \varphi_2 + s_2 \cdot \varphi_4) =$$

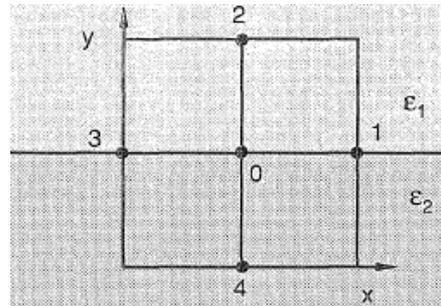
$$\varphi_0 (s_2 s_3 + s_2 s_4) + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 s_4 \cdot h^2 \underbrace{(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})}_{\Delta \varphi = 0}$$

=>

$$\varphi_0 = \frac{\frac{\varphi_1}{s_1(s_1 + s_3)} + \frac{\varphi_2}{s_2(s_2 + s_4)} + \frac{\varphi_3}{s_3(s_1 + s_4)} + \frac{\varphi_4}{s_4(s_2 + s_4)}}{\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4}}$$

2.9.2 Differenzenverfahren

- Änderung des Dielektrikums



- Gewichtete Potentiale:

$$\varphi_2 \cdot \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

$$\varphi_4 \cdot \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} \left(\varphi_1 + \varphi_3 + \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \varphi_2 + \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \varphi_4 \right)$$

2.9.2 Differenzenverfahren

Punktiteration

- Allen Nichtrandpunkten wird zunächst ein Startpotential (Schätzwert) vorgegeben. Von den Rändern beginnend werden die Potentiale dann schrittweise verbessert. Dieses Verfahren wird solange fortgesetzt, bis sich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Iterationen die Potentialwerte aller Punkte um weniger als eine vorgegebene Schranke ändern.
- Abbruchkriterium: $|\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n| < \varepsilon$ für alle φ_i

2.9.2 Differenzenverfahren

- Startwert für Potentiale im Feldraum $\varphi = 5V$
- Nach der ersten Iteration:

																			$\varphi = 50 V$																						
45	26	22	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	29	40																					
40	19	13	11	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	18	30																				
35	16	10	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	13	20																				
30	14	8	7	6	6	6	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	7	10																				
25	12	8	6	5	5	5	5	5	5	4																															
20	11	7	6	5	5	5	5	5	5	4																															
15	9	6	6	5	5	5	5	5	5	3																															
10	6	4	4	3	3	3	3	3	3	2																															
																			$\varphi = 0 V$																						

2.9.2 Differenzenverfahren

- Nach 10 Iterationen

$\varphi = 50 \text{ V}$

45	43	42	41	40	39	39	39	39	39	38	38	38	38	38	38	39	39	40	40
40	37	34	33	31	30	30	29	29	28	28	27	27	27	28	28	28	29	30	30
35	31	28	26	24	23	22	21	21	20	19	7	18	18	18	18	19	19	20	20
30	26	23	20	18	17	16	15	14	12	10	9	9	9	9	9	9	10	10	10
25	12	8	6	5	5	5	5	5	6										
20	11	7	6	5	5	5	5	5	3										
15	9	6	6	5	5	5	5	5	2										
10	7	5	4	3	3	2	2	1	1										

$\varphi = 0 \text{ V}$

- Nach 50 Iterationen

$\varphi = 50 \text{ V}$

45	45	45	44	44	44	43	43	42	42	41	41	40	40	40	40	40	40	40	40
40	40	39	39	38	37	37	36	35	33	32	31	31	30	28	30	30	30	30	30
35	34	34	33	32	31	30	29	27	25	23	22	21	20	20	20	20	20	20	20
30	29	28	27	26	25	24	22	20	17	13	11	11	10	10	10	10	10	10	10
25	24	23	22	21	20	18	16	13	9										
20	19	18	17	16	15	13	11	9	5										
15	13	12	11	10	10	9	7	5	3										
10	7	6	6	5	5	4	3	3	1										

$\varphi = 0 \text{ V}$

2.9.3 Finite Elemente Verfahren

2.9.3.1 Grundprinzip

- Die Methode der Finiten Elemente greift das Differentialgleichungsproblem nicht direkt durch Approximation der eingehenden Ableitungen an.
- Stattdessen nutzt dieses Verfahren aus, dass Randwertprobleme für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen oft als **Variationsproblem** formuliert werden können.

2.9.3.1 Grundprinzip

- Die Variationsrechnung besagt, dass aus einer vorgegebenen Funktionsklasse eine oder mehrere Funktionen derart zu bestimmen sind, dass ein gegebenes, von der Wahl dieser Funktionen abhängiges, bestimmtes ein- oder mehrfaches Integral einen Extremwert, d.h. einen Maximal- oder Minimalwert, annimmt.
- Das Variationsintegral, auch Funktional genannt, lässt sich in der Anwendung der Elastizitätstheorie als Energie interpretieren, weshalb auch von der Energiemethode gesprochen wird.

2.9.3.1 Grundprinzip

- Das Variationsintegral der Elektrostatik für ein ebenes Feld lautet:

$$X = \iint \left(\frac{1}{2} DE \right) dx dy = \iint \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) dx dy = \iint \left(\frac{1}{2} \epsilon (\text{grad } \varphi)^2 \right) dx dy$$

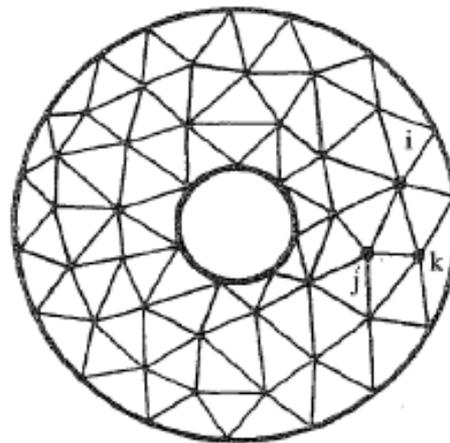
$$X = \iint \frac{1}{2} \epsilon \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

- Die Funktion φ ist in dem geschlossenen Bereich so zu bestimmen, dass das Funktional $X(\varphi)$ einen Extremwert (Minimum) annimmt.
- Wie beim Differenzenverfahren liefert auch hier die geschlossene Berandung die Randbedingungen.

2.9.3.2 Diskretisierung

- Die Diskretisierung des Problems erfolgt beim Verfahren der Finiten Elemente dadurch, dass das gesamte Feldgebiet in eine große Anzahl von kleinen Zonen, den **Finiten Elementen**, eingeteilt wird.
- Beim ebenen Problem wird der Feldbereich in ein Netz von dreieckigen Elementen eingeteilt.
- Ein Vorteil dieser Dreieckselemente ist der, dass sie jede beliebige Form des Grenzbereichs nachbilden können, vorausgesetzt, dass der Rand mit ausreichender Genauigkeit von einer Zahl gerader Linien dargestellt werden kann.

2.9.3.2 Diskretisierung



Diskretisierung durch Dreieckselemente

2.9.3.2 Diskretisierung

- Jedes Element ist durch seine Knoten definiert. Innerhalb eines jeden Elements ist das elektrostatische Potential eine Funktion der Potentiale $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$ der Knoten des Elements:

$$\varphi[N] \cdot (\varphi)^e = (Ni, Nj, Nk) \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{pmatrix}$$

- $[N]$ = Formfunktionsmatrix (Zeilenmatrix); geometrische Daten (lineare Funktionen der Knotenkoordinaten)
- $(\varphi)^e$ = Eckpotentiale

2.9.3.3 Funktional für elektrostatische Felder

- Wie bereits erwähnt, stellt die Formfunktion den Zusammenhang zwischen der Potentialverteilung im finiten Element und den Potentialen φ_e an den Knoten her. Es gilt also

$$\varphi = f(N, \varphi_e)$$

Erhalten wird in Matrixschreibweise:

$$\varphi = [N][\varphi_e]$$

Wird das Potential φ im Funktional durch diesen Ausdruck ersetzt führt dies auf:

$$X = \iint \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) \right] (\varphi_e)^2 dx dy$$

2.9.3.3 Funktional für elektrostatische Felder

- Die Ableitung nach den Elementpotentialen ist bei Anwendung der Produktregeln gleich Null: Für den Fall, dass das Funktional X einen Extremwert unter der Variation von φ_e annimmt, gilt

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi_e} = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi_e} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \varepsilon \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) \right] \frac{d}{d\varphi_e} (\varphi_e)^2 dx dy \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi_e} = \varepsilon \iint \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) \right] \varphi_e dx dy = 0$$

Bzw. für ein finites Element

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi_e} \right)_e = \varepsilon \int_{y_{1e}}^{y_{2e}} \int_{x_{1e}}^{x_{2e}} \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) \right] \varphi_e dx dy$$

2.9.3.3 Funktional für elektrostatische Felder

- D.h. die Extremwertbildung des Funktionals X wird zunächst durch die Diskretisierung von Einzelfunktionalen angenähert und lässt sich somit in der Form eines linearen Gleichungssystems, in dem die Knotenpotentiale φ_e unbekannt sind, darstellen.

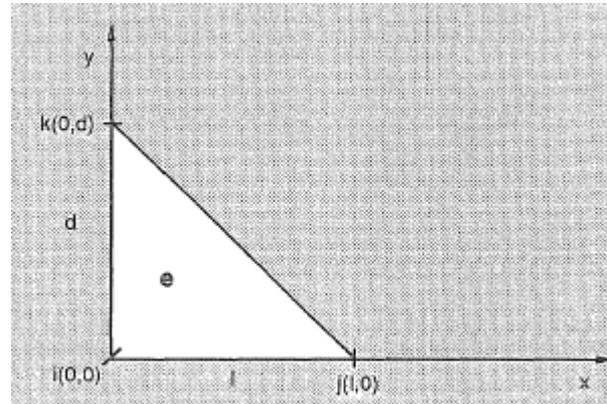
$$[K] [\varphi_e] = 0$$

$$\text{mit } (K_{ij})_e = \epsilon \int_{y_{1e}}^{y_{2e}} \int_{x_{1e}}^{x_{2e}} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy$$

$$\text{und } K_{ij} = \sum (K_{ij})_e$$

2.9.3.4 Approximationsfunktion $\varphi(x,y)_e$ innerhalb eines Elements

- Formfunktion für das Einheitsdreieck



- Die Knotenpotentiale (Eckpotentiale) des Einheitsdreiecks sind φ_i , φ_j , φ_k . Unter der Annahme einer linearen Änderung des Potentials im Dreieck (e) ergibt sich für

$$\varphi(x,y) = c_1 + c_2x + c_3y$$

2.9.3.5 Elementgleichungen und Elementmatrix

- Erhalten wird, angewandt auf die Eckpotentiale

- $\varphi_i = c_1$ $x = 0, y = 0$

- $\varphi_j = c_1 + c_2 l$ $x = l, y = 0$

- $\varphi_k = c_1 + c_3 d$ $x = 0, y = d$

$$c_1 = \varphi_i \quad c_2 = \frac{\varphi_j}{l} - \frac{\varphi_i}{l} \quad c_3 = \frac{\varphi_k}{d} - \frac{\varphi_i}{d}$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \varphi_i + \left(\frac{\varphi_j}{l} - \frac{\varphi_i}{l} \right) x + \left(\frac{\varphi_k}{d} - \frac{\varphi_i}{d} \right) y$$

$$\varphi(x,y) = \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{y}{d} \right) \varphi_i + \left(\frac{x}{l} \right) \varphi_j + \frac{y}{d} \varphi_k$$

$$\varphi(x,y) = \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{y}{d}, \frac{x}{l}, \frac{y}{d} \right) (\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k)^T$$

2.9.3.5 Elementgleichungen und Elementmatrix

■ D.h.

$$\left. \begin{aligned} N_i &= 1 - \frac{x}{l} - \frac{y}{d} \\ N_j &= \frac{x}{l} \\ N_k &= \frac{y}{d} \end{aligned} \right\} \text{Formfunktionen}$$

- Die Formfunktion für das Einheitsdreieck lautet:

$$(N) = (N_i, N_j, N_k) = \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{y}{d}, \frac{x}{l}, \frac{y}{d} \right)$$

$$\frac{dN}{dx} = \left(-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}, 0 \right) \quad ; \quad \frac{dN}{dy} = \left(-\frac{1}{d}, 0, \frac{1}{d} \right)$$

- Die Elementkoeffizientenmatrix lautet:

$$(K)^e = \varepsilon \int_0^d \int_0^{x(y)} \left(\frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy$$

2.9.3.5 Elementgleichungen und Elementmatrix

$$\frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} :$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1/l & 1/l & 0 \\ \hline -1/l & 1/l^2 & -1/l^2 & 0 \\ 1/l & 1/l^2 & 1/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} : \Rightarrow \frac{1}{d^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.9.3.5 Elementgleichungen und Elementmatrix

- Die Integration wird schrittweise über die Summanden ausgeführt

$$(K)^e = \int_0^d \int_0^{x(y)} \frac{\varepsilon}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx dy + \int_0^d \int_0^{x(y)} \frac{\varepsilon}{d^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} dx dy$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 Fläche $\frac{1}{2} l d$

$$\frac{1}{2} \varepsilon l d \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} + \frac{1}{d^2} & -\frac{1}{l^2} & -\frac{1}{d^2} \\ -\frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} & 0 \\ -\frac{1}{d^2} & 0 & \frac{1}{d^2} \end{bmatrix}$$

Elementkoeffizientenmatrix für
das Einheitsdreieck

2.9.3.6 Ermittlung der Systemgleichungen und der Systemmatrix

- Die Koeffizienten der Systemmatrix werden durch Summation zusammengehöriger Koeffizienten der Elementmatrizen erhalten. Jede Zeile der Systemmatrix beschreibt einen Elementknoten und seine Verknüpfung mit den Elementknoten aller anderen anstoßenden Elemente

$$P_{mn} = \sum p_{mn} .$$

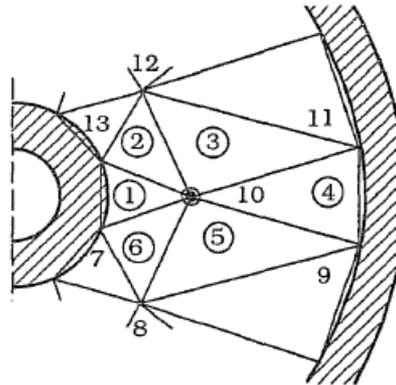
- Werden beispielsweise die Knoten 10 in der folgenden Zeichnung betrachtet, so ergibt sich ein Diagonalelement der Systemmatrix, z.B.

$$P_{10,10}, \text{ zu } P_{10,10} = p_{10,10(1)} + p_{10,10(2)} + p_{10,10(3)} + \dots + p_{10,10(6)} ,$$

ein Nichtdiagonalelement der Systemmatrix, z.B. $P_{10,12}$, zu

$$P_{10,12} = p_{10,12(2)} + p_{10,12(3)}$$

2.9.3.6 Ermittlung der Systemgleichungen und der Systemmatrix



Element 3

Element 2

$$\begin{bmatrix} p_{10,10} & p_{10,11} & p_{10,12} \\ p_{11,10} & p_{11,11} & p_{11,12} \\ p_{12,10} & p_{12,11} & p_{12,12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} p_{10,10} & p_{10,12} & p_{10,13} \\ p_{12,10} & p_{12,12} & p_{12,13} \\ p_{13,10} & p_{13,12} & p_{13,13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \end{Bmatrix} = 0$$

2.9.3.6 Ermittlung der Systemgleichungen und der Systemmatrix

- Da nicht jeder Knoten mit jedem anderen Knoten verbunden ist, wird die Matrix nur schwach besetzt, z.B. über 99% Nullelemente.
- Durch geschickte Nummerierung im Rahmen der **Behandlung schwach besetzter Matrizen** (engl.: **sparse matrix techniques**) lässt sich erreichen, dass die wenigen von Null verschiedenen Elemente in einem symmetrisch zur Diagonalen verteilten schmalen Band liegen (**Bandmatrix**), was eine kompakte Speicherung ermöglicht.

2.9.3.7 Randbedingungen

- Die im vorigen Schritt aufgestellte Systemmatrix $[P]$ ist wie die Knotenadmittanzmatrix $[V]$ der Leistungsflussrechnung bzw. Netzwerktheorie symmetrisch und singulär.
=> ohne Einführung von Randbedingungen ist das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar.
- Die Berücksichtigung der Randbedingungen bei der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen entspricht der Festlegung der beim analytischen Lösen eines unbestimmten Integrals bzw. einer Differentialgleichung auftretenden Integrationskonstanten.

2.9.3.7 Randbedingungen

- Da die Potentiale der Randknoten gekannt werden- im einfachsten Fall 0% und 100% - können die Zeilen der Randknoten gestrichen werden.
- Mit dem Verschwinden der Randpotentiale im Knotenpotentialvektor würden aber auch gleichzeitig alle Produkte, die Randpotentiale als Faktoren aufweisen, $P_{mn}\varphi_{Rand}$, verschwinden.
- Um dies zu vermeiden, werden diese Produkte auf die rechte Gleichungsseite gebracht - auf diese Weise wird auch der beim Streichen der Zeilen mit Randpotentialen verlorengegangene quadratische Charakter der Matrix wieder hergestellt - und erhält folgendes Gleichungssystem

$$[\tilde{P}]\{\tilde{\varphi}\} = [P]_{Rand}\{\varphi\}_{Rand},$$

dessen rechte Seite bekannt ist.

2.9.3.7 Randbedingungen

- Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach dem Knotenpotentialvektor $\{\tilde{\varphi}\}$ liefert die gesuchten Potentialwerte in den Elementknoten im Feldraum,

$$\{\tilde{\varphi}\} = [\tilde{P}]^{-1}[P]_{Rand}\{\varphi\}_{Rand}$$

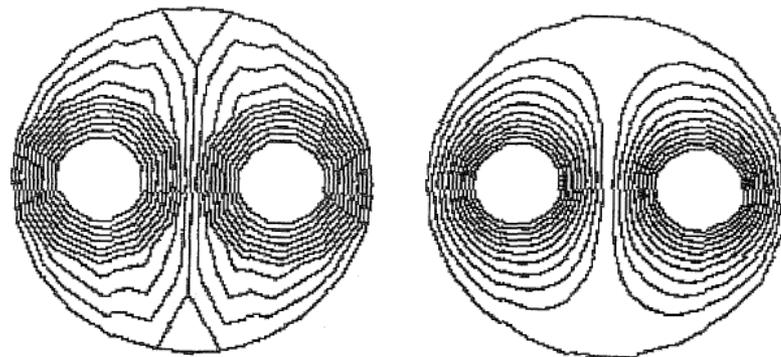
- In der Praxis wird das Gleichungssystem gewöhnlich nicht durch Inversion der Koeffizientenmatrix sondern iterativ gelöst.
- Nach Erhalt der Knotenpotentiale können die Potentialfunktionen $\varphi_{\Delta A}(x,y)$ und die Feldstärke $E = - \text{grad } \varphi$ in den Elementen ermittelt werden. Hier ist ausdrücklich zu betonen, dass die Auflösung des Gleichungssystems lediglich diskrete Werte der Potentiale bzw. Feldstärken liefert.

2.9.3.7 Randbedingungen

- Die Darstellung des Ergebnisses in Form von Feldbildern usw. erfordert zusätzliche Zeichenprogramme, die z.B. nach Ermittlung von Punkten gleichen Potentials (Stützstellen) diese durch kontinuierliche Linien verbinden, beispielsweise mit Splinefunktionen.
- Letztere sind stückweise definierte Funktionen, die an den Stoßstellen nicht nur gleiche Funktionswerte, sondern auch gleiche erste Ableitungen besitzen und daher eine knickfreie Interpolation ermöglichen.

2.9.3.7 Randbedingungen

- Im Fall des hier gewählten einfachen linearen Ansatzes ergibt sich die Feldstärke innerhalb eines Elements als konstanter Wert. Ansätze höherer Ordnung ermöglichen deutlich besser annähernde Ergebnisse für den erwarteten Feldverlauf

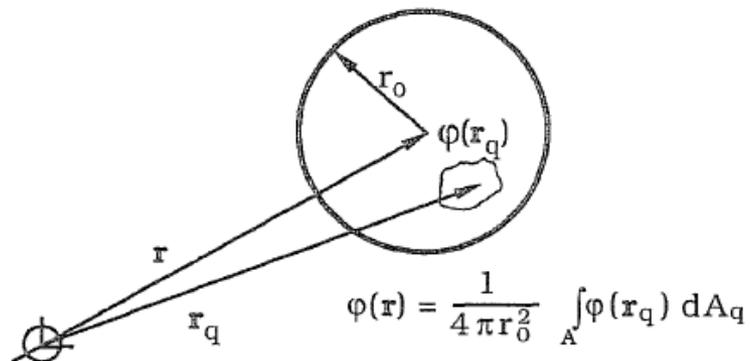


Äquipotentialliniendiagramm bei linearem (links) und quadratischem Ansatz (rechts) der Approximationsfunktion

2.9.4 Monte Carlo Methode

Mittelwertsatz der Potentialtheorie

- Die Monte Carlo Methode beruht auf dem Mittelwertsatz der Potentialtheorie, der das Potential im Zentrum einer Kugel als Mittelwert der Potentiale auf der Kugeloberfläche darstellt



Mittelwertsatz der Potentialtheorie

2.9.4 Monte Carlo Methode

- Wird die Kugeloberfläche in n kleine Teilflächen ΔA gleicher Größe unterteilt, - mit andern Worten $4\pi r_0^2 = n\Delta A$ -, lässt sich das Integral durch eine Summe annähern,

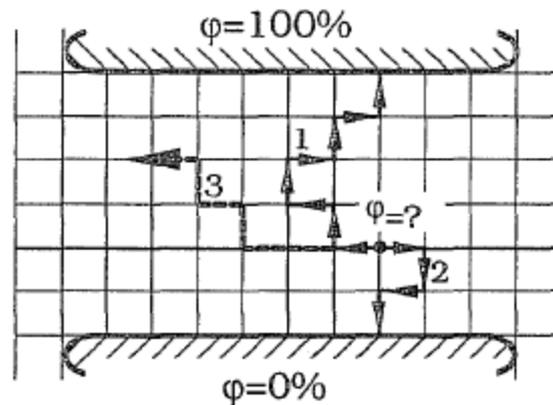
$$\varphi(r) = \frac{1}{n\Delta A} \sum_1^n \varphi_{\Delta A} \Delta A$$

bzw.

$$\varphi(r) = \frac{1}{n} \sum_1^n \varphi_{\Delta A}$$

2.9.4 Monte Carlo Methode

- Die Monte Carlo Methode der Potentialberechnung stellt nun eine statistische Interpretation dieser Beziehung dar. Im einfachsten Fall wird das Feldgebiet mit einem äquidistanten Punktgitter überzogen.



Zur Veranschaulichung der Monte Carlo Methode der Potentialberechnung. Das Punktgitter hat nicht die Aufgabe der Diskretisierung des Feldraums wie beim Differenzenverfahren. Es dient hier lediglich der Festlegung der Wege beim Fortbewegen vom Startpunkt.

2.9.4 Monte Carlo Methode

- Anschließend wird sich, ausgehend von einem Feldpunkt, dessen Potential gesucht ist, zu einem möglichen Nachbarpunkt weiter bewegt, wobei die Richtung in jedem Gitterpunkt erneut von einem Zufallsgenerator mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 festgelegt wird. Bei N Versuchen wird $N_{100\%}$ -mal das Potential $\varphi_{100\%}$ und $N_{0\%}$ -mal das Potential $\varphi_{0\%}$ erreicht.
- Für eine angemessene Zahl von $N = N_{100\%} + N_{0\%}$ Versuchen berechnet sich dann das Potential des Startpunkts zu

$$\varphi(r) = \frac{1}{N} [N_{100\%} \varphi_{100\%} + N_{0\%} \varphi_{0\%}]$$

2.9.4 Monte Carlo Methode

- Der Vorteil der Monte-Carlo-Methode liegt in ihrer Einfachheit und der wenig aufwendigen Programmieretechnik, ihr Nachteil im großen Rechenzeitbedarf, da ja nach N Versuchen jeweils nur das Potential eines einzigen Feldpunkts erhalten wird.
- Eine Steigerung ihre Effizienz erlaubt die **Floating-Random-Walk-Methode** mit veränderlicher Schrittweite, auf die hier jedoch nicht weiter eingegangen werden soll.
- Bislang hat die Monte-Carlo-Methode in der numerischen Feldberechnung nur vergleichsweise geringe Verbreitung gefunden,

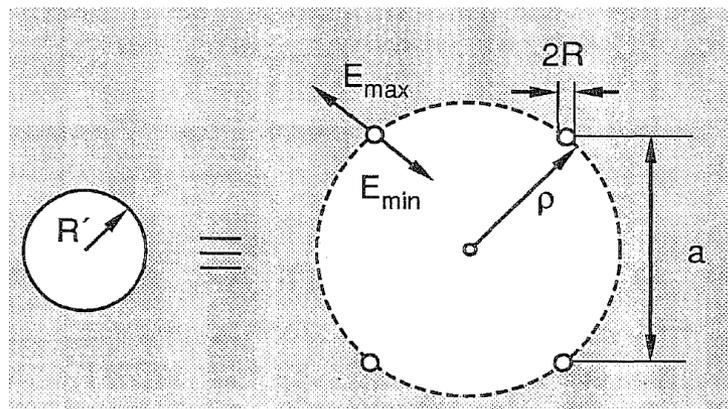
2. Berechnung elektrischer Felder

- 2.1 Maxwell'sche Gleichungen in Integralform
- 2.2 Maxwell'sche Gleichungen in Differentialform
- 2.3 Quasistatisches elektrisches Feld (50Hz-Feld der HT)
- 2.4 Potential und Potentialfunktion
- 2.5 Felder ohne Randbedingung
- 2.6 Einfache Felder mit Randbedingung
- 2.7 Laplace'sche Potentialgleichung
- 2.8 Poisson'sche Potentialgleichung
- 2.9 Numerische Feldberechnung
- **2.10 Technische Feldprobleme**
 - 2.10.1 Bündelleiter
 - 2.10.2 Benachbarte Kugeln
 - 2.10.3 Nichtlineare Spannungsverteilung
 - 2.10.4 Durchführungen
 - 2.10.5 Kabelendverschlüsse

2.10 Technische Feldprobleme

2.10.1 Bündelleiter

- Vorteil:
 - Geringere Randfeldstärke (Koronaverluste)
 - Geringerer Wellenwiderstand ($P_{\text{nat}} = U^2/Z$)
 - Freileitung: $P_{\text{nat}} < P_{\text{Grenztherm}}$
 - Kabel: $P_{\text{nat}} > P_{\text{Grenztherm}}$
- Eine Vergrößerung des Leiterradius ist unwirtschaftlich, da die thermische Belastung von Freileitungen selten ein Problem darstellt



2.10.1 Bündelleitungen

■ Dimensionierungskriterien:

1. Ersatzradius R' für gleiche Kapazität der Anordnung

$$R' = \sqrt[n]{n \cdot R \left(\frac{a}{2 \sin \pi/n} \right)^{n-1}}$$

mit n: Teilleiterzahl
 a: Teilleiterabstand
 R: Radius der Einzelleiter

2.10.1 Bündelleitungen

- Kapazität des Bündelleiters:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln^2 \frac{R_0}{R'}}$$

R_0 : Höhe über Erdboden

R' : Ersatzradius

2-er Bündel: $R' = \sqrt{a \cdot R}$

4-er Bündel: $R' = \sqrt[4]{\sqrt{2} \cdot a^3 \cdot R}$

2.10.1 Bündelleitungen

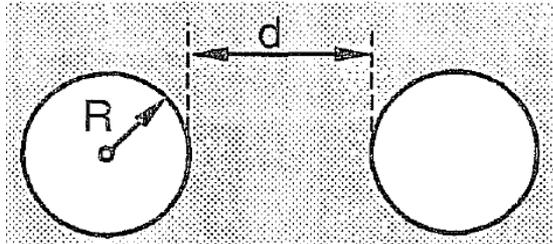
2. Ersatzradius R' für gleiche Randfeldstärke

$$\frac{R''}{R_0} = \left(\frac{R'}{R_0}\right)^{\frac{n \cdot R}{R_0}}$$

$\Rightarrow a_{\text{opt}}$ mit $E_{\text{max}} = \text{Minimum}$

- Für R'' existiert ein optimaler Wert, für den die maximale Randfeldstärke minimal wird

2.10.2 Benachbarte Kugeln (Kugelfunkenstrecke)



R = Kugelradius

D = Schlagweite

- Die Berechnung ist, obwohl sehr symmetrisch, nicht mehr mit einfachen analytischen Verfahren (Satz vom Hüllenfluss) möglich, da die Ladungsverteilung auf den Kugeloberflächen unsymmetrisch ist.
- Der Ladungsschwerpunkt liegt nicht mehr im Mittelpunkt der Kugeln. Die analytische Lösung kann nur über eine Reihenentwicklung erfolgen.
- Näherungsformeln: $d \gg R \Rightarrow$ Feld zweier Punktladungen
 $d \ll R \Rightarrow$ homogenes Feld $E = U/d$

2.10.2 Benachbarte Kugeln (Kugelfunkenstrecke)

- Für $0,1 R < d < 5 R$ wird in der Praxis folgende Näherungslösung verwendet:

$$E = \frac{U}{d} f$$

$f = f_1$ symmetrische KFS

$f = f_2$ einseitig geerdete KFS

d/r	f ₁	f ₂
0,1	1,034	1,034
0,2	1,068	1,068
0,3	1,102	1,106
0,5	1,173	1,199
1	1,359	1,517
5	3,151	5,172

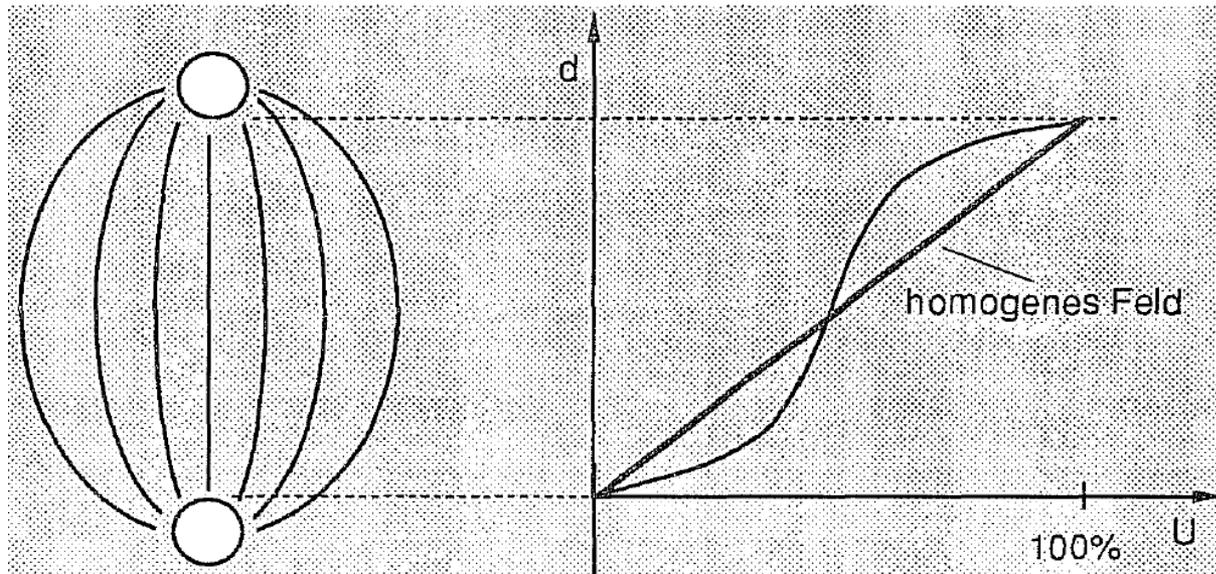
Kapazität der
Kugelfunkenstrecke:

$$C = \frac{d\pi\epsilon}{f_1 - 1}$$

Größenordnung: ca. 2...50 pF

2.10.3 Nichtlineare Spannungsverteilung

2.10.3.1 Zwei Kugeln

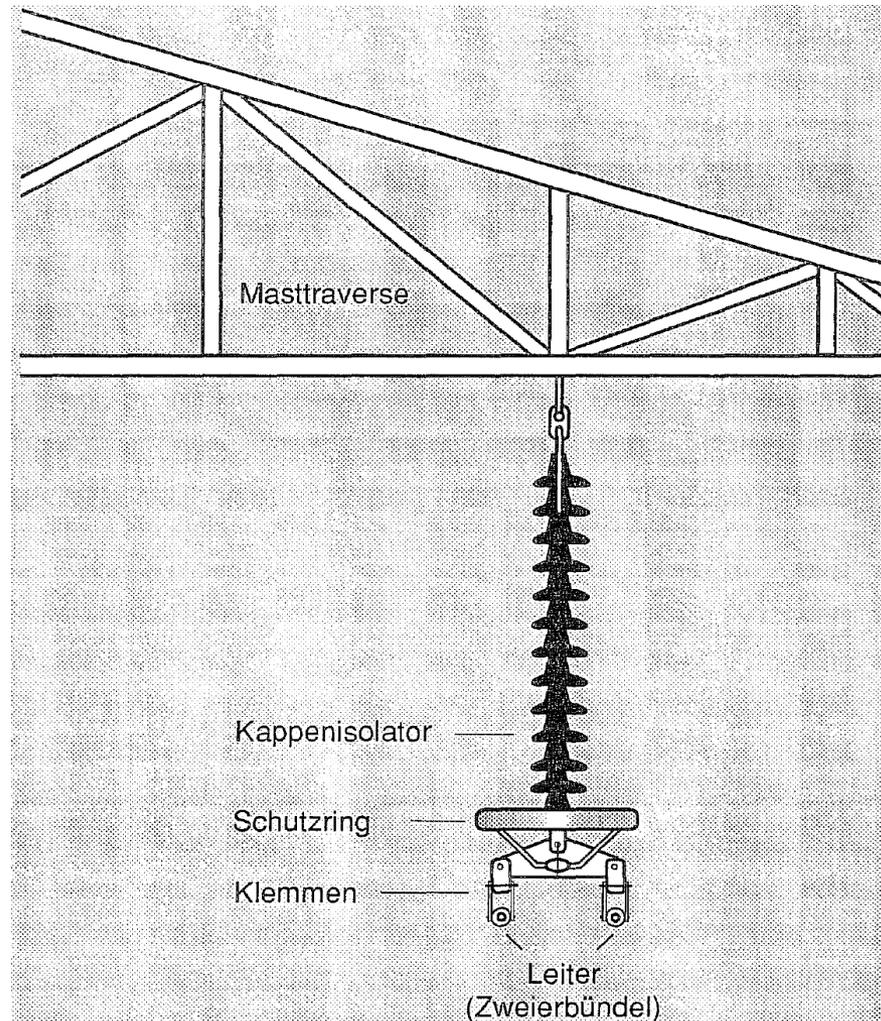


- Je kleiner der Kugeldurchmesser um so extremer ist die Nichtlinearität der Spannungsverteilung. Es ist deshalb nicht lohnenswert den Abstand der Kugeln, sondern die Kugelradien zu vergrößern

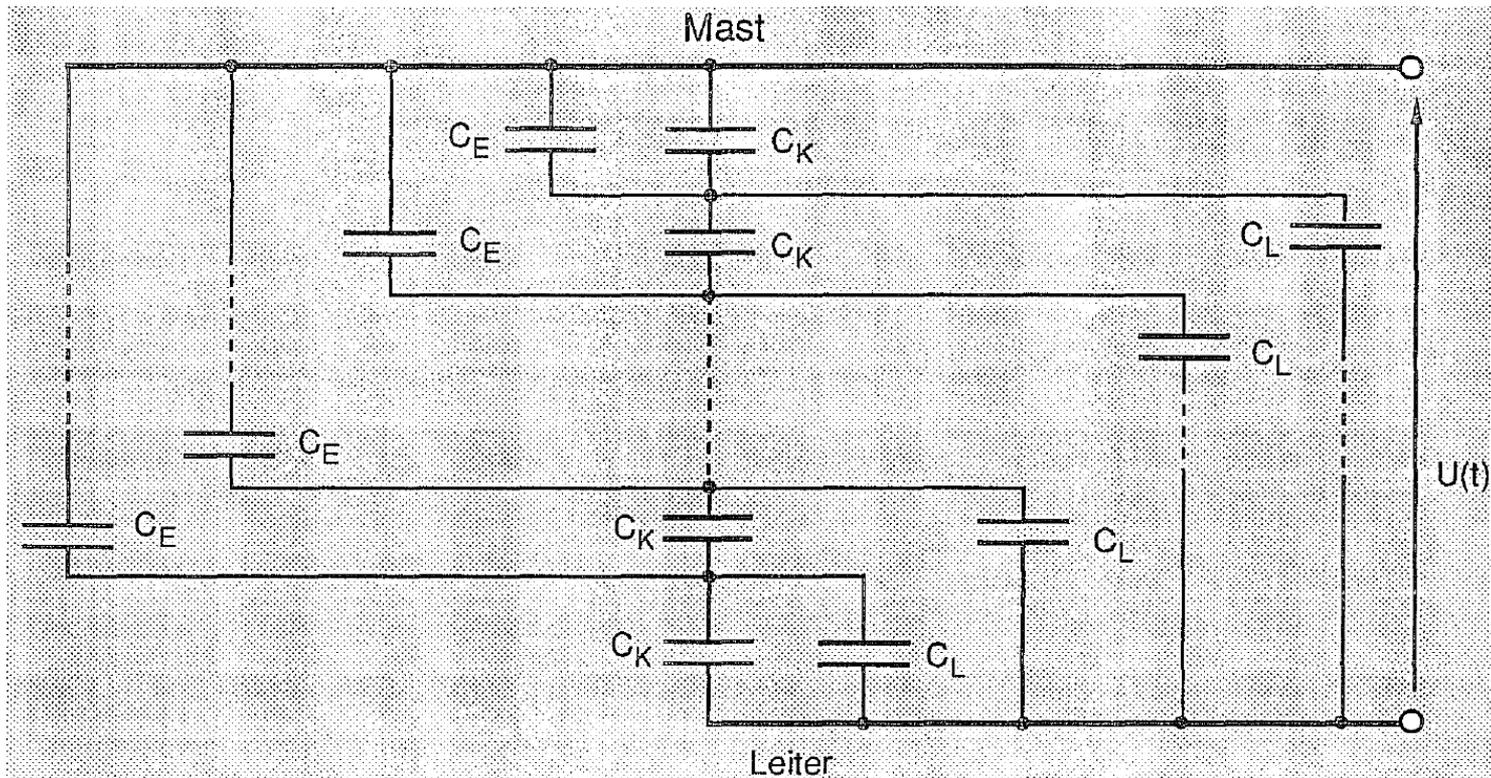
2.10.3.2 Kappenisolatorkette

- Werden mehrere einzelne Kappenisolatorelemente in Form einer Kette hintereinander gehängt, so wird die zwischen der spannungsführenden und der geerdeten Elektrode anliegende Wechselspannung nicht linear auf die einzelnen Isolatoren aufgeteilt, da Streukapazitäten die Spannungsverteilung maßgeblich beeinflussen können.
- Zum einen existieren Streukapazitäten zwischen den einzelnen Isolatorelementen und der Masttraverse, d.h. Erdstreukapazitäten, und zum anderen ergeben sich Streukapazitäten zum Leiterseil.
- Folgendes Bild zeigt das vollständige Ersatzschaltbild einer Kappenisolatorkette; dem einzelnen Kappenisolator ist dabei die Kapazität C_K zugeordnet.

2.10.3.2 Kappenisolatorokette

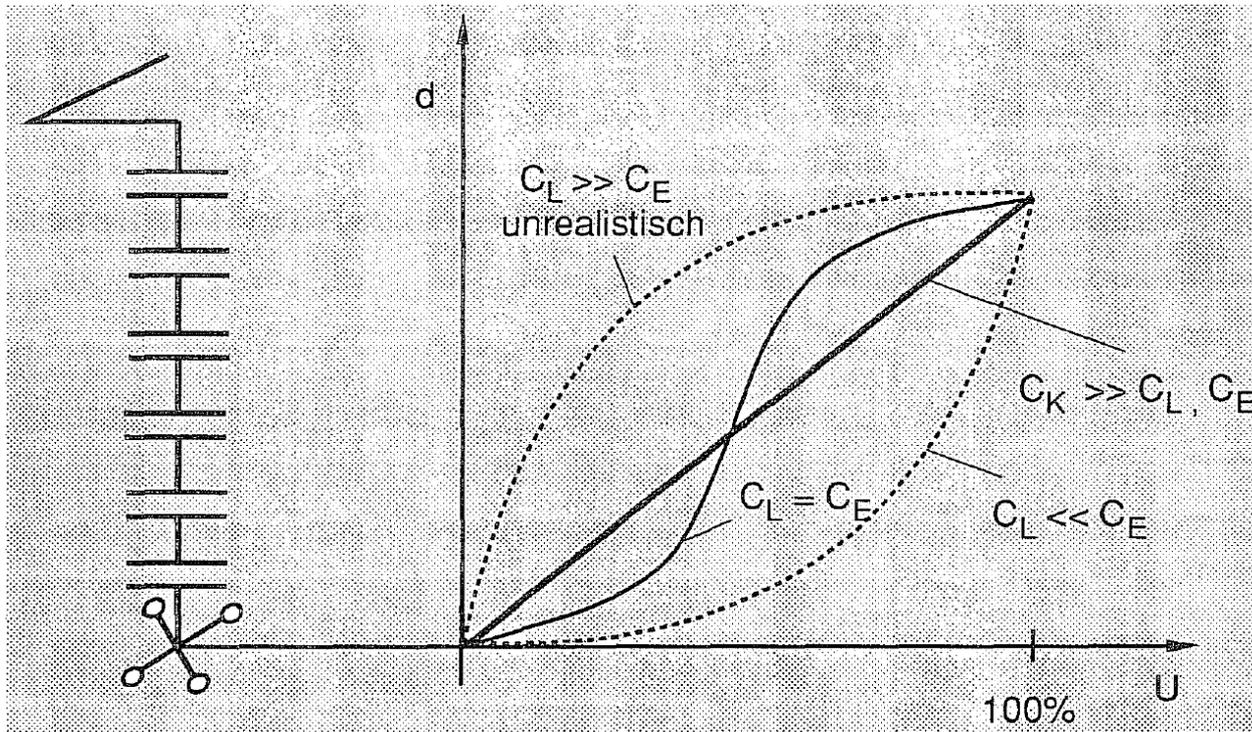


2.10.3.2 Kappenisolatorkette



Ersatzschaltbild einer Kappenisolatorkette

2.10.3.2 Kappenisolatorkette



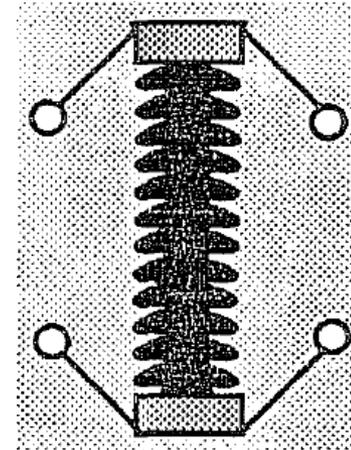
Spannungsverteilung

Die Spannungsverteilung wird linearisiert, wenn C_K größer wird

2.10.3.2 Kappenisolatorokette

Lichtbogenschutzarmatur

- a) Spannungsverteilung wird linearisiert
- b) Isolator wird bei Kurzschluss geschützt

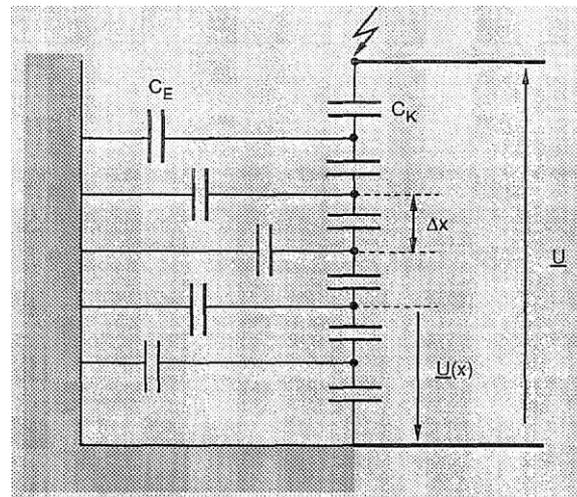


- Die Armatur muss derart gestaltet sein, dass der Lichtbogen vom Isolator weg zum gewünschten Lichtbogenfusspunkt läuft.

2.10.3.2 Kappenisolatorkette

Spannungsverteilung längs Isolatorokette

1. Einfache Verkettung, d.h. nur Streukapazitäten gegen Ende (Mast) seien vorhanden.



$$\text{Querbelag: } C_E' = \frac{C_E}{\Delta x}$$

$$\text{Längsbelag: } C_K' = C_K \cdot \Delta x$$

2.10.3.2 Kappenisolatorkette

Ansatz: Leistungsgleichungen in komplexer Schreibweise

$$\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} = \frac{C_E'}{C_K'} \underline{U}(x) = \gamma^2 \underline{U}(x) \quad \gamma = \sqrt{\frac{C_E'}{C_K'}}$$

Exponentialansatz:

$$\underline{U}(x) = \underline{A} e^{\gamma x} + \underline{B} e^{-\gamma x}$$

Randbedingungen:

$$: x = 0: \underline{U}(0) = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$x = l: \underline{U}(l) = \underline{U} \Rightarrow$$

$$\underline{U} = A e^{\gamma l} + B e^{-\gamma l} = A(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})$$

$$\Rightarrow A = \frac{-\underline{U}}{e^{-\gamma l} - e^{\gamma l}} \quad B = \frac{\underline{U}}{e^{-\gamma l} - e^{\gamma l}}$$

$$\underline{U}(x) = \frac{\underline{U}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} e^{\gamma x} - \frac{\underline{U}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} e^{-\gamma x}$$

$$= \underline{U} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} = \underline{U} \frac{\sinh \gamma x}{\sinh \gamma l}$$

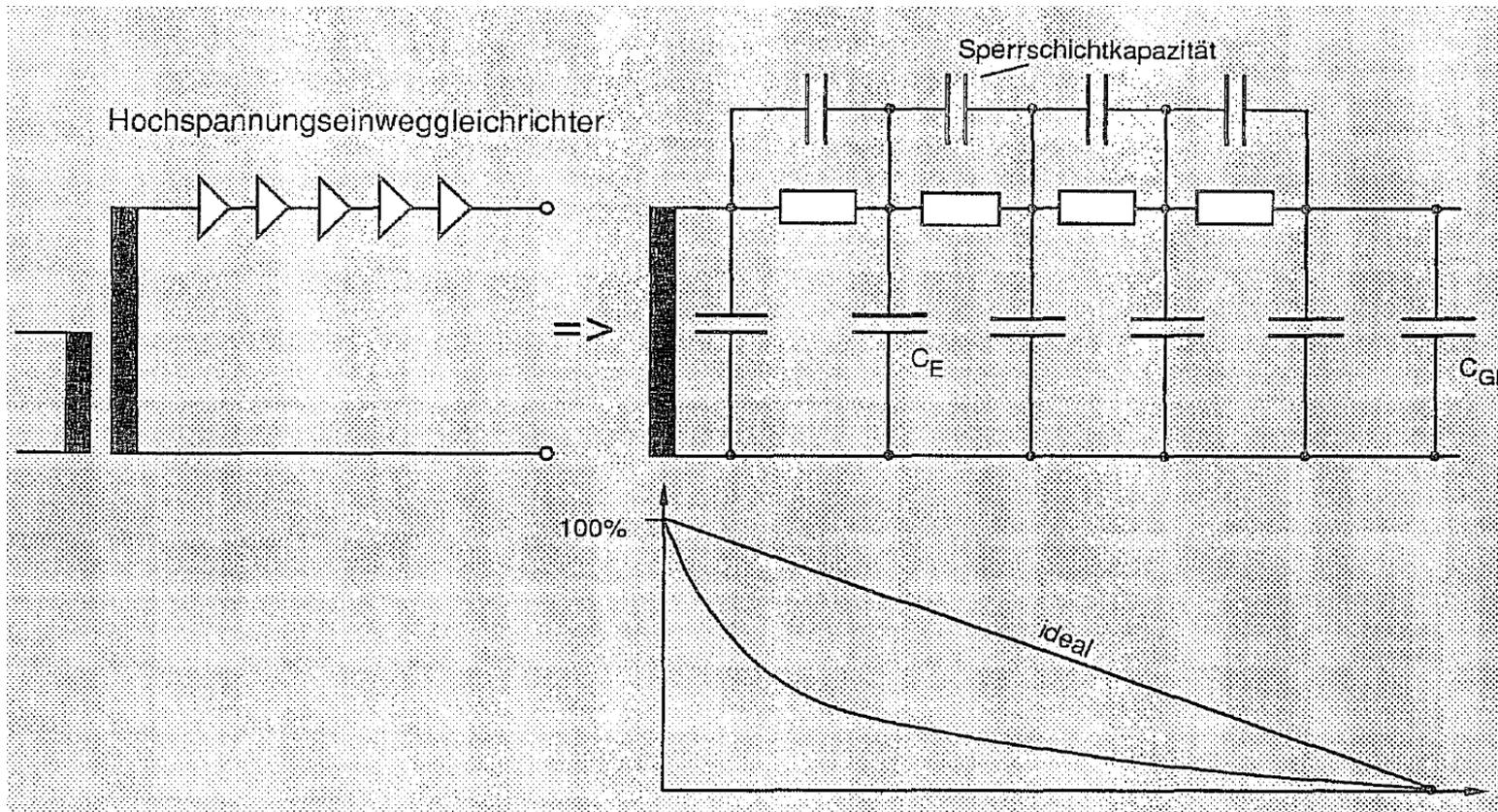
2.10.3.2 Kappenisolatorkette

2. Doppelte Verkettung, d.h. die Streukapazitäten zur Hochspannungselektrode werden vernachlässigt

Lösung:
$$\underline{U}(x) = \left[\frac{\sinh ax}{\sinh al} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \left(1 - \frac{\sinh ax + \sinh(l-x)}{\sinh al} \right) \right]$$

mit
$$\alpha = \frac{C_E'}{C_K}; \quad \beta = \frac{C_L'}{C_K}; \quad a = \alpha + \beta$$

2.10.3.3 Gleichrichter



2.10.3.3 Gleichrichter

- Da die Sperrschichtkapazität der Dioden viel kleiner ist als die Streukapazitäten nach Erde, ergibt sich eine extrem nichtlineare Spannungsverteilung bei Sperrbetrieb der Ventile (entspricht einfacher Verkettung bei Isolator-kette).
- Durch kapazitive Steuerung werden die Dioden in Sperrrichtung vor übermäßiger Spannungsbelastung geschützt.

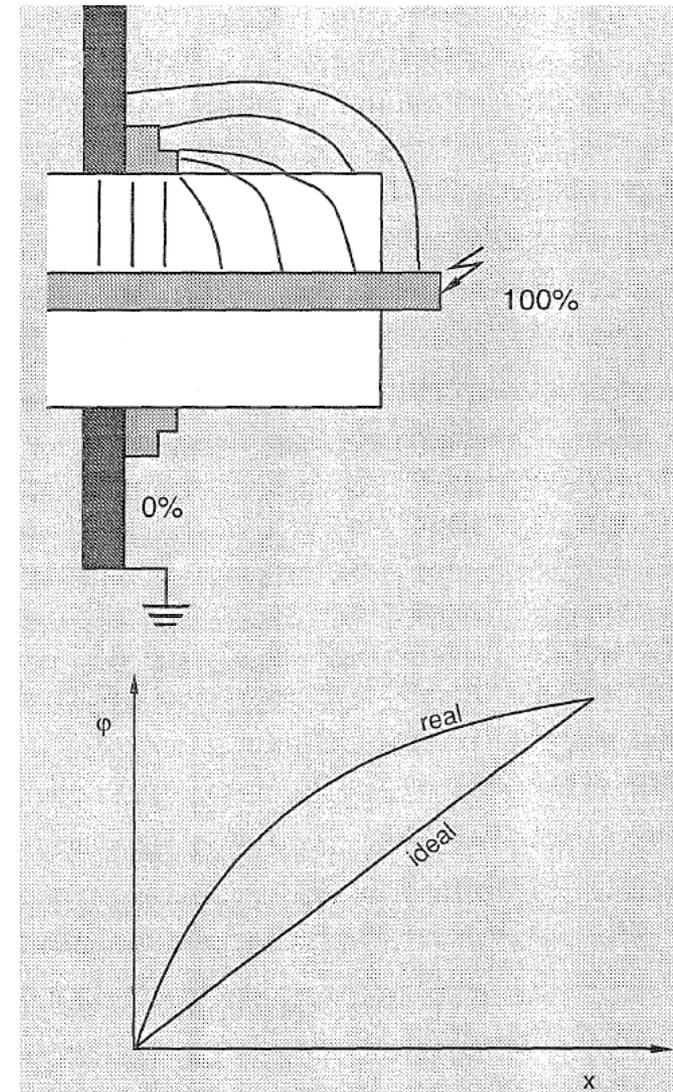
=> parallel zu den Dioden werden Steuerkondensatoren geschaltet.

2.10.4 Durchführungen

- Einsatzgebiete: „Hochspannungen durch eine Wand führen“
- Anwendung:
 - Transformator-kessel
 - Kondensator-gehäuse
 - Innen-raum-schaltungen
 - SF₆-Durchführungen

2.10.4 Durchführungen

- Axiale Spannungsverteilung
- Der größte Teil der Spannung fällt in Flanschnähe ab, sodass es keinen Sinn hat die Durchführung in Richtung ihrer Achse zu verlängern
- Eine Feldstärkenreduktion wird nur durch Vergrößern des Durchmessers erreicht.



2.10.4 Durchführungen

2 Möglichkeiten der elektrischen Überbeanspruchung:

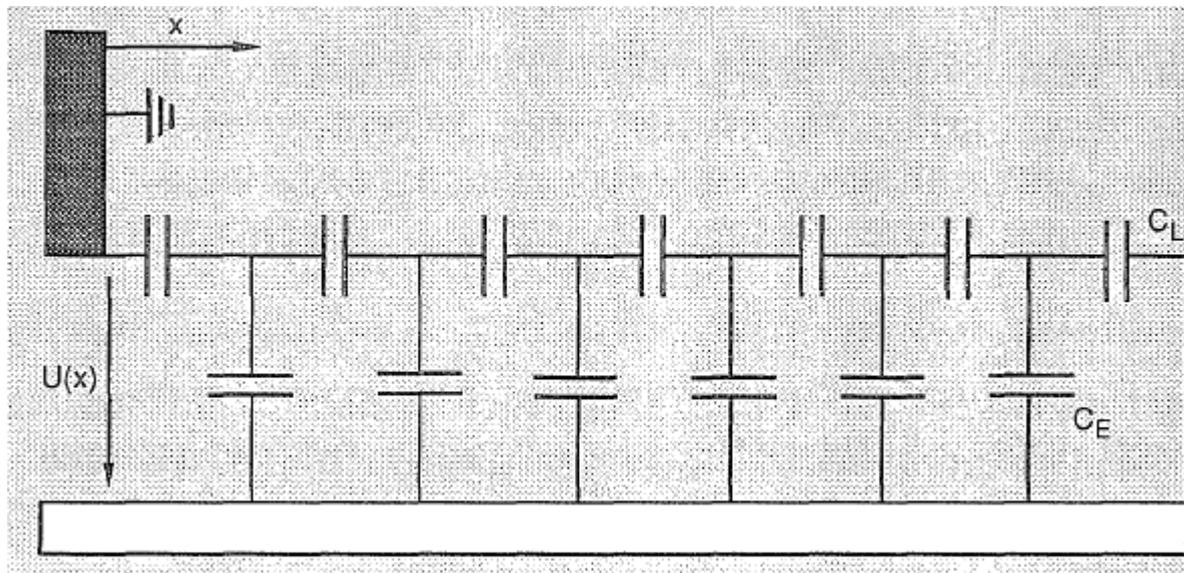
a) Durchschlag in Flanschnähe

$$U_D = f(E_{\text{radial}})$$

b) Durchschlag längs der Durchführung

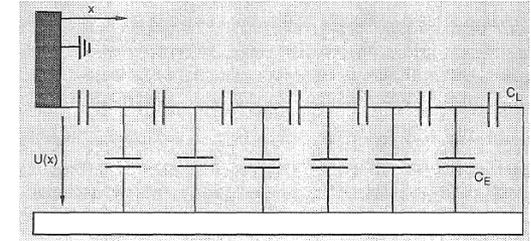
$$U_D = f(E_{\text{axial}})$$

■ Spannungsverteilung längs einer Durchführung



2.10.4 Durchführungen

- Querbelag: $C_E' = \frac{C_E}{\Delta x}$
- Längsbelag: $C_L' = CL \cdot \Delta x$
- Lösungsansatz: $\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} = \frac{C_E'}{C_L'} \underline{U}(x) = \gamma^2 \underline{U}(x)$



$$\gamma = \sqrt{\frac{C_E'}{C_L'}}$$

- Exponentialansatz: $\underline{U}(x) = \underline{A}e^{\gamma x} + \underline{B}e^{-\gamma x}$
- Randbedingungen: $x = 0: \underline{U}(0) = -U$
 $x = l: \underline{U}(l) = 0$

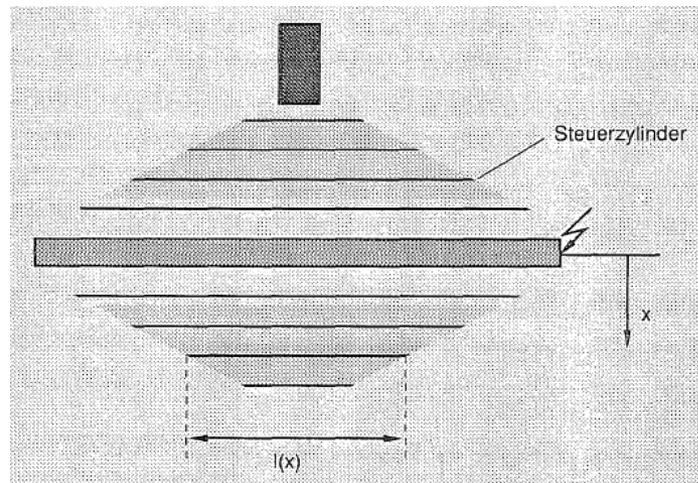
$$\Rightarrow \underline{U}(x) = \underline{U} \frac{\sinh[\gamma(l-x)]}{\sinh \gamma l}$$

$$\Rightarrow \underline{E}(x) = -\frac{d\underline{U}(x)}{dx} = U \cdot \gamma \frac{\cosh[\gamma(l-x)]}{\sinh \gamma l}$$

$$\Rightarrow x = 0 = E_{\max}$$

2.10.4 Durchführungen

- Da bei hohen Spannungen die Durchführungen zu dick werden, bzw. ab einer bestimmten Spannung praktisch nicht mehr realisierbar sind, wird die Feldverteilung durch sogenannte „Steuerbeläge“ gesteuert.
- Kondensatordurchführung



Steuerung für konstante Feldstärke in radialer Richtung

2.10.4 Durchführungen

- Die Steuerung entspricht einer Reihenschaltung vieler Zylinderkondensatoren.
- Es gilt:

$$D(x) = \frac{Q}{2\pi \cdot x \cdot l(x)}$$

$$E(x) = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot x \cdot l(x)}$$

⇒ $E(x) = \text{constant}$ für $x \cdot l(x) = \text{constant}$

Dimensionierungskriterium: $x \cdot l(x) = \text{konstant}$

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Verwendung verschiedener Dielektrika.

2.10.4 Durchführungen

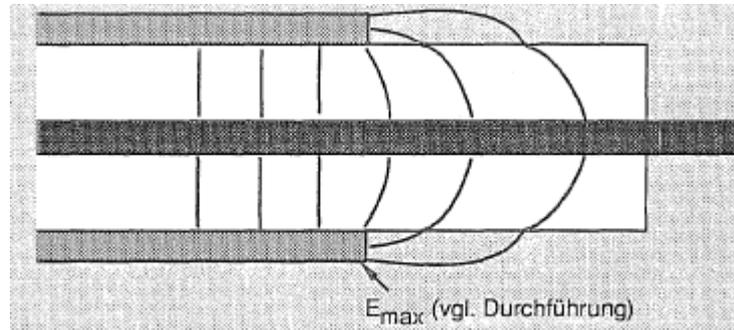
$E(x) = \text{constant}$ für $\varepsilon_r \cdot x \cdot l(x) = \text{constant}$,

d.h. am Innenleiter wird Isolierstoff mit größerem ε_r , nach außen hin werden Isolierstoffe mit abnehmenden ε_r verwendet.

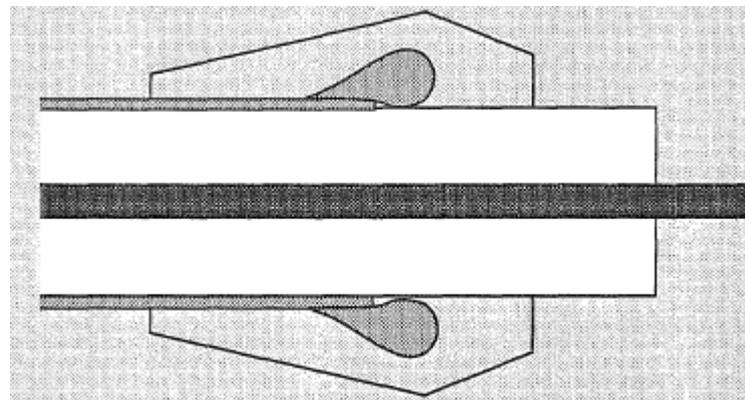
- Anwendungsbeispiel:

Öl-Papier, am Innenleiter wird Papier höherer Dichte (=größeres ε_r) verwendet. Dadurch wird eine Homogenisierung der Feldstärke im Kabel und weiterhin eine bessere Auslastung des Dielektrikums erreicht.

2.10.5 Kabelendverschlüsse



besser: Aufschiebeendverschluss



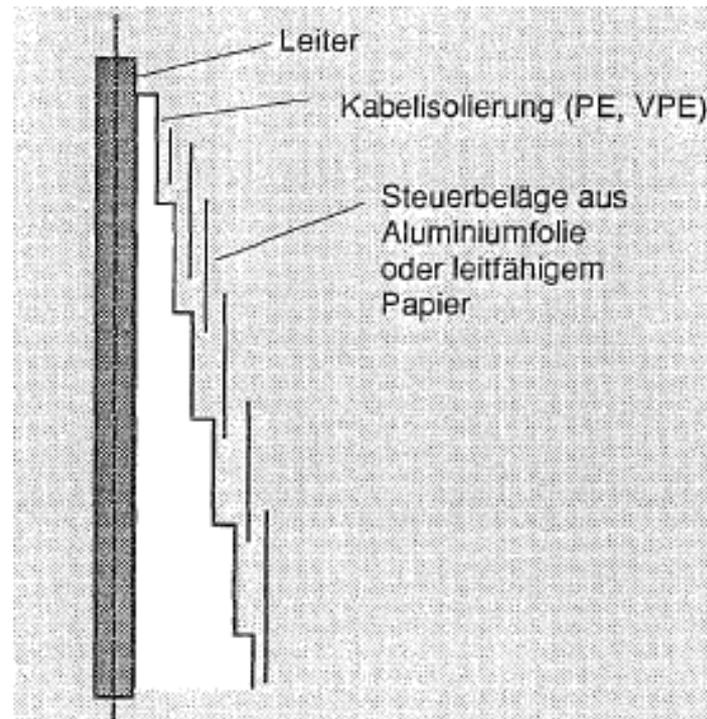
Silikonaufschiebeendverschluss (Stresskonus)

2.10.5 Kabelendverschlüsse

- In der Mittelspannungs- und Hochspannungstechnik (bis 110 kV) werden heute ausschließlich Aufschiebeendverschlüsse aus Silikon oder EPDM verwendet.
- In der Höchstspannungstechnik werden teilweise Aufschiebeendverschlüsse, teilweise gewickelte Endverschlüsse verwendet.

2.10.5 Kabelendverschlüsse

Gewickelter Endverschluss



2.10.5 Kabelendverschlüsse

Herstellung:

- Kabelisolierung wird stufig abgeschält
- Endverschluss wird mit Ölpapier gewickelt
- Steuerbeläge werden eingebracht
- Über die Wickelkeule wird der Porzellanisolator gestülpt
- Wickelraum wird evakuiert und anschließend mit Öl (Kabelmasse) gefüllt

Dimensionierungskriterium:

Kapazität zwischen den einzelnen Steuerbelägen ist annähernd gleich groß, dadurch wird eine lineare Spannungsaufteilung, längs der Durchführung, erreicht.